11. (අ) $\alpha + \beta = p$ හා $\alpha\beta = q$

$\alpha(\alpha + \beta)$ හා $\beta(\alpha + \beta)$ මූල වන

සමීකරණය $x^2 - ax + b = 0$ ලෙස ගනිමු

එවිට $a = \alpha(\alpha + \beta) + \beta(\alpha + \beta)$

$= (\alpha + \beta)^2 = p^2$ හා

$b = [\alpha(\alpha + \beta)][\beta(\alpha + \beta)]$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 = qp^2$

∴ අවශ්‍ය සමීකරණය

$x^2 - p^2x + qp^2 = 0$

(ආ) ∴ සියලු x, y සඳහා

$2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2 =$

$(ax + by + c)(px + qy + r)$ ලෙස ගනිමු.

$x = 0$ විට $3y^2 - 5y - 2$

$= (by + c)(qy + r)$ සියලු y සඳහා

නමුත් $3y^2 - 5y - 2 = (3y+1)(y-2)$

∴ $b = 3, c = 1, q = 1$ හා $r = -2$

∴ සියලු x, y සඳහා

$2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2 =$

$(ax + 3y + 1)(px + y - 2)$ වේ

දැන් $y = 0$ විට සියලු x සඳහා

$2x^2 - 2 = (ax + 1)(px - 2)$

අනුරූප සංගුණක සැසඳීමෙන්

$2 = ap$ හා $-2a + p = 0$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$ ලෙස එමනිසා

$p = \pm 2$ වේ

∴ $2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$

$= (-x + 3y + 1)(-2x + y - 2)$ හෝ

$= (x + 3y + 1)(2x + y - 2)$ හෝ වේ.

xy හි සංගුණක සැසඳීමෙන් $\lambda = \pm 7$ වේ.

(ඇ) $$\frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2} = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

මෙහි A, B, C හා D නියත වේ.

$$\frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A(x^3-2x^2+x)+B(x^2-2x+1)+C(x^2-x)+Dx}{x(x-1)^2}$$

අනුරූප සංගුණක සැසඳීමෙන්

$A = 2,\ -2A + B + C = 0,$
$A - 2B - C + D = -1$ හා $B = 3$

එමනිසා $C = 1$ හා $D = 4$ වේ

$$\therefore \frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2} = 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

12. (අ) $U_n = 1.n + 2(n-1) + \ldots\ldots +$

$(n-1).2 + n.1$ නම්

$U_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ ——— ❶

සාධනය

$n = 1$ විට

❶ හි L. H. S $= U_1 = 1.1 = 1$

❶ හි R. H. S. $= \frac{1}{6}.1.2.3 = 1$

∴ ❶ හි L.H.S = ❶ හි R.H.S.

∴ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට $U_p = \frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$

∴ $n = p + 1$ විට U_{p+1}

$= 1.(p+1) + 2.p + \ldots + p.2 + (p+1).1$

$= 1.p + 2(p-1) + \ldots\ldots + p.1$
$+ (1 + 2 + \ldots\ldots + (p+1)).1$

$= U_p + (1 + 2 + \ldots\ldots + (p+1))$

$= \frac{1}{6}p(p+1)(p+2) + \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$

$= \frac{1}{6}(p+1)(p+2)(p+3)$

∴ $n = p + 1$ විටද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව

සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා

$U_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ වේ

සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා

$$\frac{1}{U_n} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{3}{n(n+1)} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$$

$= V_n - V_{n+1}$

මෙහි $V_n = \frac{3}{n(n+1)}$

$\frac{1}{U_1} = V_1 - V_2$

$\frac{1}{U_2} = V_2 - V_3$

....

....

....

$\frac{1}{U_{n-1}} = V_{n-1} - V_n$

$\frac{1}{U_n} = V_n - V_{n+1}$

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r} = V_1 - V_{n+1}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)(n+2)} = 0$$

(ආ) $(1+kx)^{10}$

$$= {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 kx + {}^{10}C_2 k^2x^2 + \ldots + {}^{10}C_r k^r x^r + \ldots + C_{10} k^{10} x^{10}$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{10} x^{10}$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{10} {}^{10}C_r k^r x^r = \sum_{r=0}^{10} a_r x^r, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore {}^{10}C_r k^r = a_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots, 10$ [illegible]

${}^{10}C_2 k^2 = a_2 = \frac{20}{9}$ [illegible]

[illegible] ${}^{10}C_2 k^2 = \frac{10.9}{2} k^2$

$$\Rightarrow \frac{10.9}{2} k^2 = \frac{20}{9}$$

$$\therefore k^2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{2}{9}$$

($\because$ k ධන නිඛිලයක් නිසා)

$$\therefore \left(1 + \frac{2}{9}x\right)^{10} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{10} x^{10}$$

$x = 1$ විට

$$\left(\frac{11}{9}\right)^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \text{ ——— ①}$$

$x = -1$ විට

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots - a_9 + a_{10} \text{ ——— ②}$$

$$① - ② \quad \left(\frac{11}{9}\right)^{10} - \left(\frac{7}{9}\right)^{10} = 2\left[a_1 + a_3 + \ldots + a_9\right]$$

එනම්

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{11^{10} - 7^{10}}{2 \cdot 9^{10}} \text{ ——— ③}$$

② + ③

$$\Rightarrow a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \left(\frac{7}{9}\right)^{10} + \frac{11^{10} - 7^{10}}{2 \times 9^{10}}$$

$$= \frac{2 \times 7^{10} + 11^{10} - 7^{10}}{2 \times 9^{10}}$$

$$= \frac{11^{10} + 7^{10}}{2 \times 9^{10}}$$

03. (අ) $\frac{(-1+i)^3}{(1+i)^4} = \frac{(-1+i)^3(1-i)^4}{(1+i)^4(1-i)^4}$

$$= -\frac{(1-i)^7}{2^4}$$

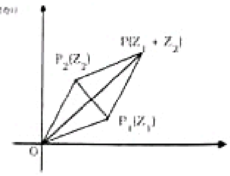
$$= -\frac{1}{2^4}(1 - 7i - 21 + 35i + 35 - 21i - 7 + i)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$$

$\therefore$ මාපාංකය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ හා විස්තාරය $\frac{5\pi}{4}$

(ආ)



P_1, P_2 ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය වේ නම් OP_1 හා OP_2 බද්ධ පාද ලෙස ගෙන OP_1PP_2 සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණ කළවිට P ලක්ෂ්‍යයෙන් $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරේ.

සාධනය -

$Z_1 = x_1 + iy_1$ හා $Z_2 = x_2 + iy_2$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ හා $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ වේ.

$P \equiv (x, y)$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $\frac{x+0}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ හා

$$\frac{y+0}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 \text{ හා } y = y_1 + y_2$$

$$\therefore P \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

P ලක්ෂ්‍යයෙන් $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි.

එනම් P ලක්ෂ්‍යය $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි.

එනම් P ලක්ෂ්‍යයෙන් $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව [illegible]

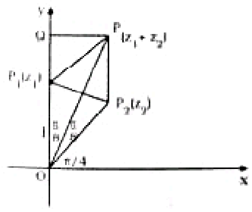
$$Z_1 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$= 1(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$$

$$Z_1 + Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) i$$



$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{QP}{OQ}$$

$$= \frac{\text{Re}(z_1 + z_2)}{\text{Im}(z_1 + z_2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1$$

04. (අ) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2(2\sin x)}{2\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(2\sin x)}{(2\sin x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\left[\frac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}\right]^2$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

$= 2$ මෙහි $t = 2\sin x$, $x \to 0$ විට $t \to 0$ වේ.

(ආ) $y = e^{k\sin^{-1}x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{k\sin^{-1}x} \times k \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

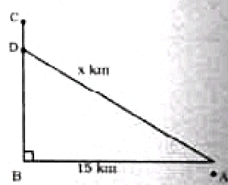
$$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{dy}{dx} = k\,e^{k\sin^{-1}x}$$

$$= ky$$

$x = \frac{1}{2}$ විට $y = e^{k\pi/6}$

එවිට $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} k e^{k\pi/6}$

(ඇ)



$DC = 50 - \sqrt{x^2 - 225}$; $x \geq 15$ වේ

$$T(x) = \frac{x}{40} + 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 225}}{50}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{1}{40} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{50\sqrt{x^2 - 225}}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{1}{40} - \frac{x}{50\sqrt{x^2 - 225}}$$

$$= \frac{1}{200\sqrt{x^2 - 225}} \times \left\{5\sqrt{x^2 - 225} - 4x\right\}$$

$= 0 \quad x = 25$ වි

x හි අගය	$15 < x < 25$	$x = 25$	$25 < x < 50$
$\frac{dT(x)}{dx}$	(-)	0	(+)

x හි අගය 15 සිට 25 දක්වා වැඩිවන විට T(x) අඩුවේ.
x හි අගය 25 සිට 50 දක්වා වැඩිවන විට T(x) වැඩිවේ.
x හි අගය 25 දී T(x) අවම වේ.
∴ අවම කාලය T(25) වේ.

එනම් අවම කාලය $= \frac{25}{40} + 1 - \frac{\sqrt{625 - 225}}{50}$

$= \frac{5}{8} + 1 - \frac{20}{50}$

$= 0.625 + 1 - 0.400$

$= \underline{1.225}$ h

05. (අ) $I = \int_1^8 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} dx$

$y = x^{\frac{1}{3}}$ ලෙස ගනිමු. එවිට $dy = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

එනම් $3y^2 dy = dx$

$x = 1$ විට $y = 1$, $x = 8$ විට $y = 2$

එවිට $I = 3\int_1^2 \frac{dy}{1+y^2} = 3\left[\tan^{-1} y\right]_1^2$

$= 3\left\{\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1\right\}$

$= 3\left\{\tan^{-1} 2 - \pi/4\right\}$

(ආ) $I = \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x \, dx$

$= \int_0^{\pi} e^{-2x} \frac{d}{dx}(\sin x) dx$

$= \left[e^{-2x} \sin x\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x \, dx$ (with $\sin x$ term $= 0$)

$= \underline{2J}$ —— ①

$J = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x \, dx$

$= \int_0^{\pi} e^{-2x} \frac{d}{dx}(-\cos x) dx$

$= \left[-e^{-2x} \cos x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x \, dx$

$= e^{-2\pi} + 1 - 2I$ —— ②

① හා ② න් $I = \frac{1}{5}(e^{2\pi} + 1)$

$I = \frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1)$

(ඇ) $\frac{x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)^2}$

$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

මෙහි A, B හා C නියත වේ.

∴ $A = -1$ හා $C = -3$

$x = 0$ විට $0 = 1 + B - 3 \Rightarrow B = 2$

$\int \frac{x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)^2} dx$

$= -\int \frac{dx}{(x-1)} + 2\int \frac{dx}{x+1} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2}$

$= -\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + D$

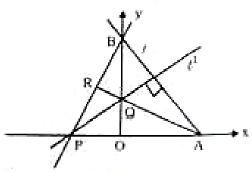
D යනු අභිමත නියතයකි.

06. අභිලම්බ ඛණ්ඩයේ සමීකරණය
$y = mx + c$ ලෙස ගනිමු.
(a, o) හා (o, b) ලක්ෂ්‍ය හරහා යන බැවින්
$0 = am + c$ හා $b = c$ වේ.

∴ $m = -\frac{b}{a}$

∴ සරල රේඛාවේ සමීකරණය

$y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



l හි සමීකරණය $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1$ බැවින්

$A = (h, o)$ හා $B = (o, k)$

l^1 හි සමීකරණය

$\frac{x}{h^1} + \frac{y}{k^1} = 1$ ලෙස ගනිමු. $l \perp l^1$ බැවින්

$\left(-\frac{k^1}{h^1}\right)\left(-\frac{k}{h}\right) = -1 \Rightarrow \frac{k^1}{h} = \frac{-h^1}{k} = t$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $k^1 = ht$, $h^1 = -kt$ හා
එබැවින් $P = (-kt, 0)$ හා $Q = (0, ht)$
ලෙස ලැබේ.

AQ හි සමීකරණය $\frac{y-0}{x-h} = \frac{0-ht}{h-0} = -t$

$\Rightarrow y = -tx + ht$

$y + tx = ht$

BP හි සමීකරණය $\frac{y-k}{x-0} = \frac{k-0}{0-(-kt)} = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow yt - kt = x$

$\Rightarrow yt - x = kt$

$R \equiv (x_0, y_0)$ නම් එවිට $y_0 = t(h - x_0)$ හා

$x_0 = t(y_0 - k)$

∴ $\frac{y_0}{h - x_0} = \frac{x_0}{y_0 - k}$, $x_0 \neq h$ හා $y_0 \neq k$ විට

එනම් $x_0^2 + y_0^2 - hx_0 - ky_0 = 0$

එබැවින් R ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$ වෘත්තය මත වේ.

07. C_1 හා C_2 වෘත්ත දෙකේ කේන්ද්‍ර ද r_1 හා r_2 අරය වෘත්ත දෙකේ අරයන් ලෙස ගනිමු.

එවිට $C_1 \equiv (-g_1, -f_1)$; $r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$ හා

$C_2 \equiv (-g_2, -f_2)$; $r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$

වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම්

$(C_1C_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$

එනම් $(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2$

$= (g_1^2 + f_1^2 - c_1) + (g_2^2 + f_2^2 - c_2)$

එනම් $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

(p, o) වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය r වෘත්තයේ අරය ලෙස ගනිමු. එවිට වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x - p)^2 + y^2 = r^2$

එනම් $x^2 + y^2 - 2px + p^2 - r^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන නිසා

$2(-p)(-4) = 21 + p^2 - r^2$

එනම් $r^2 = p^2 - 8p + 21$ —— ❶

තවද $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බැවින්

$|\pm r + 2| = \sqrt{(p - (-2))^2 + (0 - (-3))^2}$

$= \sqrt{(p+2)^2 + 3^2}$ —— ❷

$r^2 \pm 4r + 4 = p^2 + 4p + 4 + 9$

$r^2 \pm 4r = p^2 + 4p + 9$ —— ❸

❸ - ❶ ⇒

$r = \pm 3(p - 1)$ —— ❹

එවිට,
❶ න් $9p^2 - 18p + 9 = p^2 - 8p + 21$

$8p^2 - 10p - 12 = 0$

$4p^2 - 5p - 6 = 0$

$(4p + 3)(P - 2) = 0$

$p = -¾$ හෝ $p = 2$

$P = 2$ විට ❹ ගන ලකුණ සැලකූවිට $r = 3$

$P = -3/4$ විට ❹ හි සෘණ ලකුණ සැලකූ විට

$r = \frac{21}{4}$

∴ $P = 2$, $r = 3$ විට ❷ න් ධන ලකුණ සැලකූවිට

$3 + 2 = \sqrt{(2+2)^2 + 9} = 5$

වෘත්ත දෙකේ අරයන්ගේ එකතුව
= කේන්ද්‍ර දෙක අතර දුර
∴ වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වේ.
එවිට වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x - 2)^2 + y^2 = 9$

එනම් $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$

$P = -\frac{3}{4}$ හා $r = 21/4$ විට ❷ සෘණ සැලකූවිට

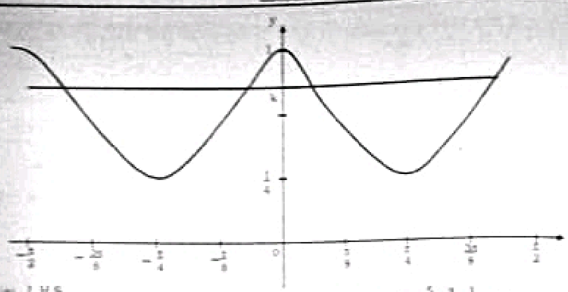
$\left|-\frac{21}{4} + 2\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4} + 2\right)^2 + 9}$

$\frac{13}{4} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{144}{16}}$

∴ වෘත්ත දෙකේ අරයන්ගේ අන්තරය
= කේන්ද්‍ර දෙක අතර දුර
∴ වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ.
∴ එවිට වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x + ¾)^2 + y^2 = \left[\frac{21}{4}\right]^2$

එනම් $2x^2 + 2y^2 + 3x - 54 = 0$



y [illegible] $= \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$ [illegible]

$\cos 4x = -1$

$\Rightarrow x = \pm\ \pi/4 \ ; -\pi/2 \le x \le \pi/2$

(ii) $k < \frac{1}{4}$ [illegible] $k > 1$ [illegible]

$y = \cos^6 x + \sin^6 x$ [illegible] $y = k$ [illegible] $\cos^6 x + \sin^6 x = k$ [illegible]

(iii) $k = \frac{1}{4}$ [illegible] $y = k$ [illegible]

$y = \cos^6 x + \sin^6 x$ [illegible]

$x = -\pi/4$ [illegible] $x = \pi/4$ [illegible]

$\cos^6 x + \sin^6 x = k$ [illegible]

(iiii) $k = 1$ [illegible] $y = k$ [illegible] $y = \cos^6 x + \sin^6 x$ [illegible] $x = -\pi/2,\ 0$ [illegible] $\pi/2$ [illegible] $\cos^6 x + \sin^6 x = k$ [illegible]

(vi) $\frac{1}{4} < k < 1$ [illegible] $y = \cos^6 x + \sin^6 x$

[illegible] $y = k$ [illegible] $\cos^6 x + \sin^6 x = k$ [illegible]

(a) L.H.S

$= \frac{1 + \cos\theta + \sin\theta}{1 - \cos\theta + \sin\theta}$

$= \frac{1 + \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta - \cos\theta}$

$= \frac{(1 + \sin\theta + \cos\theta)^2}{(1 + \sin\theta)^2 - \cos^2\theta}$

$= \frac{(1+\sin\theta)^2 + 2\cos\theta(1+\sin\theta) + \cos^2\theta}{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta}$

$= \frac{(1+\sin\theta)^2 + 2\cos\theta(1+\sin\theta) + (1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}$

$= \frac{1 + \sin\theta + 2\cos\theta + (1 - \sin\theta)}{2\sin\theta}$

$= \frac{2(1 + \cos\theta)}{2\sin\theta} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$

(b) $8(\cos^6 x + \sin^6 x)$

$= 8\{\sin^6 x + (1 - \sin^2 x)^3\}$

$= 8(\sin^6 x + 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x)$

$= 8\{1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x\}$

$= 8 - 24\sin^2 x(1 - \sin^2 x)$

$= 8 - 6\sin^2 2x$

$= 8 - 3(1 - \cos 4x)$

$= 5 + 3\cos 4x$

$y = \cos^6 x + \sin^6 x$ [illegible]

$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ [illegible]

y [illegible] $= \frac{8}{8} = 1$ [illegible]

$\cos 4x = 1 \Rightarrow x = 0;\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$

(c) $4\sin^2 x + 12\sin x\cos x - \cos^2 x + 5 = 0$

$2(1 - \cos 2x) + 6\sin 2x - \frac{\cos 2x + 1}{2} + 5 = 0$

$\Rightarrow 12\sin 2x - 5\cos 2x + 13 = 0$

$\frac{12}{13}\sin 2x - \frac{5}{13}\cos 2x = -1$

$\frac{5}{13}\cos 2x - \frac{12}{13}\sin 2x = 1$

$\cos\alpha = 5/13,\ \sin\alpha = 12/13$ [illegible]

$\cos\alpha, \sin\alpha > 0$ [illegible] $0 < \alpha < \pi/2$

[illegible] $\cos\alpha\cos 2x - \sin\alpha\sin 2x = 1$

[illegible] $\cos(2x + \alpha) = 1$

$2x + \alpha = 2n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$

[illegible] $x = n\pi - \alpha/2$

$n = 1$ [illegible] $x = \pi - \alpha/2$ [illegible]

$0 < \pi - \alpha/2 < 2\pi$

$n = 2$ [illegible] $x = 2\pi - \alpha/2$ [illegible]

$0 < 2\pi - \alpha/2 < 2\pi$

[illegible] $x = \pi - \alpha/2$ [illegible] $x = 2\pi - \alpha/2$ [illegible] $0 < x < 2\pi$ [illegible]

(d) [illegible] $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

[illegible] $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\frac{b + c}{2k - 1} = \frac{c + a}{2k} = \frac{a + b}{2k + 1} = \lambda$

[illegible]

$b + c = \lambda(2k - 1)$ — ❶
$c + a = 2\lambda k$ — ❷
$a + b = \lambda(2k + 1)$ — ❸

❶ − ❷
$b - a = -\lambda$ — ❹

❷ − ❸
$c - b = -\lambda$ — ❺

❹ + ❺
$c - a = -2\lambda$ — ❻

$c + a = 2\lambda k \quad \therefore 2c = 2\lambda(k - 1)$

$\frac{c}{k - 1} = \lambda$

❸ + ❹

$2b = 2\lambda k \Rightarrow \frac{b}{k} = \lambda$

❸ − ❹

$2a = 2\lambda k + 2\lambda \Rightarrow \frac{a}{1 + k} = \lambda$

[illegible] $\frac{a}{k + 1} = \frac{b}{k} = \frac{c}{k - 1}$

$\Rightarrow \frac{\sin A}{k + 1} = \frac{\sin B}{k} = \frac{\sin C}{k - 1}$

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \frac{k^2 + (k - 1)^2 - (k + 1)^2}{2k(k - 1)}$

$= \frac{k - 4}{2(k - 1)}$

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$= \frac{(k + 1)^2 + (k - 1)^2 - k^2}{2(k + 1)(k - 1)}$

$= \frac{k^2 + 2}{2(k^2 - 1)}$

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$= \frac{(k + 1)^2 + k^2 - (k - 1)^2}{2k(k + 1)}$

$= \frac{k + 4}{2(k + 1)}$

$\frac{\cos A}{(k - 4)(k + 1)} = \frac{\cos B}{k^2 + 2}$

$= \frac{\cos C}{(k + 4)(k - 1)}$ //