01. (a) $f(x) = x^2 + bx + c$ හා $g(x) = x^2 + qx + r$ යැයි ගනිමු

α, β යනු $g(x) = 0$ හි මූලයන් නම්

$\alpha + \beta = -q$ ——— ①

$\alpha\beta = r$ ——— ②

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = (\alpha^2 + b\alpha + c)(\beta^2 + b\beta + c)$$
$$= \alpha^2\beta^2 + b\alpha^2\beta + c\alpha^2 + b\alpha\beta^2 + b^2\alpha\beta + bc\alpha + c\beta^2 + bc\beta + c^2$$
$$= (\alpha\beta)^2 + b\alpha\beta(\alpha + \beta) + c[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + bc(\alpha + \beta) + b^2\alpha\beta + c^2$$
$$= r^2 - brq + c(q^2 - 2r) - bcq + b^2r + c^2$$
$$= c^2 - 2cr + r^2 - brq + cq^2 - bcq + b^2r$$
$$= (c - r)^2 - br(q - b) + cq(q - b)$$
$$= (c - r)^2 - (q - b)(br - cq)$$
$$= \underline{(c - r)^2 - (b - q)(cq - br)}$$

$f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ ට පොදු මූලයක් තිබේ නම්

$f(\alpha) = 0$ හෝ $f(\beta) = 0$ ට හෝ වේ.

එවිට $f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0$ වේ

එනම් $(c - r)^2 - (b - q)(cq - br) = 0$

$\Longrightarrow (c - r)^2 = (b - q)(cq - br)$

එමනිසා $(b - q)$, $(c - r)$ සහ $(cq - br)$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක වේ.

α, δ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම්

$\alpha + \delta = -b$ ——— ③ සහ $\alpha\delta = c$ ——— ④

② හා ④ න් $\alpha(\beta + \delta) = r + c$ ——— ⑤

$\alpha^2\beta\delta = cr$ ——— ⑥

α යනු $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ හි පොදු මූලය නම්

$\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ හා $\alpha^2 + q\alpha + r = 0$

එමනිසා $(q - b)\alpha = c - r$

දැන් $b \neq q$ සහ $c \neq r$ විට $\alpha = \dfrac{c - r}{q - b}$

දැන් ⑤ න් $\beta + \delta = \dfrac{(c + r)(q - b)}{c - r}$ සහ

⑥ න් $\beta\delta = \dfrac{cr(q - r)^2}{(c - r)^2}$

$\therefore$ β, δ මූලයන වන සමීකරණය

$$x^2 - \frac{(c + r)(q - b)}{(c - r)}x + \frac{cr(q - b)^2}{(c - r)^2} = 0$$

(b) $p(x)$, බහු පදය $(x - \alpha)$ මගින් බෙදූ විට ලබ්ධිය $Q(x)$ හා ශේෂය R නම්

$p(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$ වේ

එවිට $p(\alpha) = R$

$p(-1) = -a - b + c = 4 \Rightarrow a + b - c = -4$ ——— ①

$p(1) = a + b + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ ——— ②

$p(2) = 8a + 2b + c = 4$ ——— ③

① හා ② න් $a + b = -2$ ——— ④ හා $c = 2$

$c = 2$, ③ හි ආදේශයෙන්

$8a + 2b = 2$

$\Rightarrow 4a + b = 1$ ——— ⑤

⑤ - ④ $3a = 3 \Rightarrow a = 1$

එවිට ④ න් $b = -3$

එවිට $p(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$

$= (x - 1)^2(x + 2)$

$p(x)$ හි රේඛීය සාධක වන්නේ $(x - 1)$ හා $(x + 2)$ වේ.

02. B - 7 G - 5

(i) 12 දෙනෙකුගෙන් පුද්ගලයන් පස්දෙනෙක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන

$$= {}^{12}C_5$$
$$= \frac{12!}{7!\,5!}$$
$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 72 \times 11$$
$$= \underline{792}$$

(ii) සියලු සීමාවකින් තොරව පස්දෙනා තෝරා හැකි විධි $\Big\} = 792$

පිරිමි ළමයින් පමණක් සිටින සේ තෝරා ගත හැකි ආකාර $\Big\} = {}^7C_5 = \dfrac{7!}{2!\,5!}$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = 21$$

යටත් පිරිසෙන් එක් ගැහැණු ළමයෙකු සිටින සේ තෝරා ගත හැකි විධි ගණන $\Big\} = 792 - 21 = \underline{771}$

(iii) විකල්ප තේරීම

B	G
4	1
3	2
2	3
1	4

යටත් පිරිසෙන් එක් පිරිමි ළමයෙක් හා එක් ගැහැණු ළමයෙක් ඇතුළත් වන සේ තේරිය හැකි ආකාර ගණන

$$= {}^7C_4 \times {}^5C_1 + {}^7C_3 \times {}^5C_2 + {}^7C_2 \times {}^5C_3 + {}^7C_1 \times {}^5C_4$$

$$= \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2}\times 5 + \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2}\times\frac{5\times 4}{2}$$
$$+ \frac{7\times 6}{2}\times\frac{5\times 4}{2} + 7\times 5$$
$$= 175 + 350 + 210 + 35 \quad = \underline{770}$$

හැකියාව

ගුණය (I) පොරොත් පූ විට පොට්ත් ගැනෙන } $= 1$
ළමයි පස්දෙනා ඇතුළත් වන විට ගණන }

පිරිමි ළමයි පස්දෙනෙකු ඇතුළත් විය හැකි විට $= {}^7c_5$
$= 21$

∴ පවත් පිරිසෙන් එක් පිරිමි ළමයෙක් සහ එක් } $= 792 - (1 + 21)$
ගැහැණු ළමයෙක් ඇතුළත් වන විට ගණන }

$= \underline{770}$

(b) $(1 + 2x + kx^2)^5$
$= (1 + x(2 + kx))^5$
$= 1 + {}^5c_1\, x(2 + kx) + {}^5c_2\, x^2(2 + kx)^2$
$+ {}^5c_3\, x^3(2 + kx)^3 + {}^5c_4\, x^4(2 + kx)^4$
$+ x^5(2 + kx)^5$

x^3 හි සංගුණකය
$= 4k\,{}^5c_2 + 8\times{}^5c_3$
$= 4k\times\frac{5\times 4}{2} + 8\times\frac{5\times 4}{2}$
$= 40k + 80$
$= \underline{40(k + 2)}$

x^3 හි සංගුණකය ශූන්‍ය වේනම්
$40(k + 2) = 0 \quad \Rightarrow \underline{k = -2}$

$(1 + 2x - 2x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$

$x = 1$ විට
$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ —— ①

$x = -1$ විට
$-243 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{10}$ —— ②

$\frac{① + ②}{2} \Rightarrow \quad a_0 + a_2 + \dots a_{10} = \underline{-121}$

$\frac{① - ②}{2} \Rightarrow \quad a_1 + a_3 + \dots a_9 = \underline{122}$

03. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ —— ①

$n = 1$ විට $\quad L{\cdot}H{\cdot}S \;= \frac{1}{1\cdot2\cdot3} \;= \frac{1}{6}$

$R{\cdot}H{\cdot}S \;= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \;= \frac{1}{6}$

∴ $n = 1$ විට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.
$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු
මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

එවිට $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)}$ වේ

දෑන් $\frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$ දෙපසටම එකතු කරමු

එවිට
$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{1}{p(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)} + \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} + \frac{1}{2(p+3)}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+2)} + \frac{1}{2(p+3)}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(\overline{p+1}+1)} + \frac{1}{2(\overline{p+1}+2)}$$

∴ $n = p$ විටදී ප්‍රතිඵලය සත්‍යනම් $n = (p + 1)$ වන විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = 1$ විට සත්‍ය බැවින්
∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

$$\frac{1}{4} - \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)(r+2)} < \frac{1}{100}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right) < \frac{1}{100}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} < \frac{1}{50}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{50}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{50}$$
$\Leftrightarrow \quad 50 < (n+1)(n+2) \qquad \because n > 0$

$f(n) = (n+1)(n+2)$ යනු n හි ආරෝහණ ශ්‍රිතයකි.

$f(5) = 6\times 7 \;= 42$
$\Rightarrow n = 5$ විට $(n+1)(n+2) < 50$
$f(6) = 7\times 8 \;= 56$
$n = 6$ විට $(n+1)(n+2) > 50$
∴ අවශ්‍යතාවය සපුරාලන n හි කුඩාම අගය 6 වේ

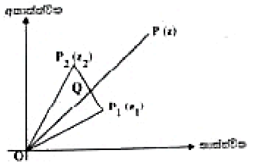
(b)
$$\frac{1}{2}|x - 1| = \begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & x \ge 1\\ -\frac{1}{2}(x-1) & x < 1\end{cases}$$

සහ
$$|x - 4| = \begin{cases}x - 4 & x \ge 4\\ -(x-4) & x < 4\end{cases}$$

<u>$x < 1$ විට</u> $\quad -\frac{1}{2}(x-1) > -(x-4) \Leftrightarrow x > 7$
මෙය විය නොහැක
<u>$1 \le x < 4$</u> විට $\quad \frac{1}{2}(x-1) > -(x-4) \Leftrightarrow x > 3$
$\Leftrightarrow 3 < x < 4$
<u>$4 \le x$</u> විට $\quad \frac{1}{2}(x-1) > (x-4) \Leftrightarrow x < 7$
∴ $\quad 4 \le x < 7$ විට අසමානතාවය තෘප්ත වේ.

∴ අසමානතාවය සපුරාලන x හි අගය කුලකය
$\{x \in R \,/\, 3 < x < 7\}$

04.



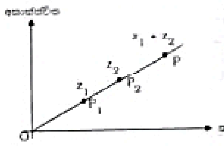
O මූල ලක්ෂ්‍යය යයි ද,
P_1 හා P_2 හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙළින්
$z_1 \;= x_1 + iy_1$ හා
$z_2 \;= x_2 + iy_2$ යයි ගනිමු.
එවිට $P_1 \;= (x_1, y_1)$ හා
$P_2 \;= (x_2, y_2)$ වේ
P_1P_2 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ලෙස ගෙන $OQ = QP$ වනසේ OQ, P දක්වා දික්කරන්න. එවිට P මගින් $z_1 + z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දක්වේ.

සාධනය – නිර්මාණය අනුව

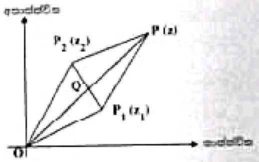
$$Q = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$OQ = QP$ නිසා $\qquad p = (x, y)$ නම්

$\frac{x + 0}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ හා $\frac{y + 0}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$
$\Rightarrow x = x_1 + x_2,\; y = y_1 + y_2$
$\Rightarrow P = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
∴ P හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$
$= \underline{z_1 + z_2}$



මෙහිදී
$OP \;= OP_1 + P_1P$ හා
$OP_2 = P_1P$ ලෙස ගත හැක
එවිට $OP \;= OP_1 + OP_2$
$z_1 = 0$ හෝ $z_2 = 0$ විට ද මෙසේම වේ.
$OP_1 = |z_1|$ හා $OP_2 = |z_2|$ සහ $OP = |z_1 + z_2|$ වේ.



∴ $O\,P_1P$ ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට
$OP < OP_1 + P_1P$
OP_1PP_2 සමාන්තරාස්‍රයක් වන බැවින්
$P_1P = OP_2 \Rightarrow OP < OP_1 + OP_2$
$\Rightarrow |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$
∴ O, P_1, P_2 ඒක රේඛීය හා O, P_1 හා P_2 එකම දිශාවට පිහිටි විට සමාන ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.
∴ සාධාරණ වශයෙන් $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ වේ.

$z_1 \;= -12 + 5i \Rightarrow |z_1| = 13,\; |z_2| = 5$ බව දී ඇත.
දැන් $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
└ $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$ විට

$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq 18$

$\quad$ └ $Arg(z_1) = Arg(z_2)$ විට

$\therefore |z_1 + z_2|$ හි විශාලතම අගය $= 18$ වේ.

$\frac{\pi}{2} < Arg\, z_1 < \pi$

$|z_1 + z_2|$ විශාලතම අගය ගන්නා විට හා

$\frac{\pi}{2} < z_2 < \pi$ විට

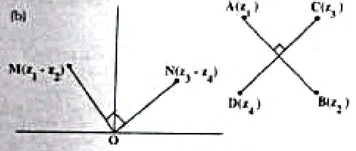
$Arg(z_2) = Arg(z_1)$ නිසාත්

$\therefore z_2 = \lambda z_1,\ \lambda \in \mathbb{R}^+$ ආකාර වේ.

එවිට $\frac{|z_2|}{|z_1|} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{13} = \lambda$

$\therefore z_2 = \frac{5}{13}(-12 + 5i) \quad = \frac{-60}{13} + \frac{25}{13}i$

(b)



BA//OM $\qquad$ DC // ON හා

BA = OM සහ DC = ON වනසේ ද

M හා N ලකුණු කළ විට

M මගින් $z_1 - z_2$ හා N මගින් $z_3 - z_4$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා

නිරූපණය වේ. එවිට OM $\perp$ ON

එනම් $|Arg(z_1 - z_2) - Arg(z_3 - z_4)| = \frac{\pi}{2}$

$$Arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = Arg(z_1 - z_2) - Arg(z_3 - z_4)$$

නිසා $\left| Arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) \right| = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ ශුද්ධ අතාත්වික වේ

05. (a) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times 2(\sin^{-1} x) \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x \quad \text{—— ①}$$

x විෂයයෙන් ① දෙපසම නැවත අවකලනයෙන්

$$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 1$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0 \quad \text{—— ②}$$

x විෂයයෙන් ② අවකලනයෙන්

$$(1 - x^2)\frac{d^3y}{dx^3} + (-2x)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1 - x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{—— ③}$$

x විෂයයෙන් ③ අවකලනයෙන්

$$(1 - x^2)\frac{d^4y}{dx^4} + (-2x)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$(1 - x^2)\frac{d^4y}{dx^4} - 5x\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{—— ④}$$

x = 0 විට ① න් $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0$

x = 0 විට ② න් $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} - 1 = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 1$$

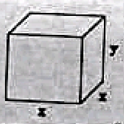
x = 0 විට ③ න් $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} - 0 - 0 = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = 0$$

x = 0 විට ④ න් $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0} - 0 - 4 \times 1 = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0} = 4$$

(b)



පෙට්ටියේ පතුලේ පැත්තක දිග x cm සහ එහි උස y cm යැයි ද සිතමු.

ආධාරකයේ වර්ගඵලය $= x^2\ cm^2$

ආධාරකය සඳහා 1 cm^2 ක වියදම p යැයි සිතමු.

එවිට පතුල සඳහා වියදම $= px^2$

අනෙක් පැති හතරේ වර්ගඵලය $= 4xy$

ඒ සඳහා වියදම $= 4xy \times 8p = 32pxy$

එවිට මුළු වියදම c නම්

$$c = px^2 + 32pxy$$

නමුත් $x^2y = 256$ නිසා $y = \frac{256}{x^2}$

එවිට $c = px^2 + 32p\,x \cdot \frac{256}{x^2}$

$$c = px^2 + 32 \times 256\,p\,\frac{1}{x}$$

$$\frac{dc}{dx} = 2px + 32 \times 256\,p\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2p}{x^2}(x^3 - 32 \times 128) = \frac{2p}{x^2}(x^3 - 2^5 \times 2^7)$$

$$= \frac{2p}{x^2}(x^3 - 2^{12})$$

අවමයක් සඳහා විට $\frac{dc}{dx} = 0$

$\Rightarrow x^3 = 2^{12} \quad \Rightarrow x = 2^4 \quad = 16$

	x < 16	x = 16	x > 16
$\frac{dc}{dx}$	< 0	0	> 0

$\therefore$ x = 16 විට වියදම අවම වේ.

$\therefore$ ලාභදායී වන්නේ x = 16 එවිට $y = \frac{256}{16^2} = 1$

$\therefore$ වඩාත් ලාභදායී වන්නේ ආධාරකයේ පැත්තක් 16 cm වන අතර උස 1 cm වීම යි.

06. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\sin x}$

$t = \tan\frac{x}{2}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

$\Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{5 + 4\cdot\frac{2t}{1 + t^2}} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{5 + 5t^2 + 8t}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{5t^2 + 8t + 5} = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{8}{5}t + 1}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + 1 - \frac{16}{25}}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}}$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\left[\tan^{-1}\frac{\left(t + \frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(\tan^{-1} 3 - \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$$

(b) $I = \int_0^1 15x^3\sqrt{1 + x^2}\,dx$

$$= 5\int_0^1 x^2\, d(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 5\left\{\left[x^2(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\, d(x^2)\right\}$$

$$= 5\left\{\left[1 \times 2^{\frac{3}{2}} - 0\right] - \int_0^1 2x(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} dx\right\}$$

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \left[\frac{2}{5}(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1\right\}$$

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \left[\frac{2}{5}\left(2^{\frac{5}{2}} - 1\right)\right]\right\}$$

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \frac{1}{5} \times 8\sqrt{2} + \frac{2}{5}\right\}$$

$$= 10\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 2$$

$$= 2\sqrt{2} + 2 \quad = 2(\sqrt{2} + 1)$$

(c) $\int \frac{x^2 - 10x + 13}{(x - 2)^2(x - 3)}\,dx$

$$\frac{x^2 - 10x + 13}{(x - 2)^2(x - 3)} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{(x - 3)}$$

$B = \frac{-3}{-1} = 3$

$C = \frac{-8}{1} = -8$

$x^2 - 10x + 13 = A(x-2)(x-3) + B(x-3) + C(x-2)^2$

x^2 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

$A + C = 1$

$A = 9$

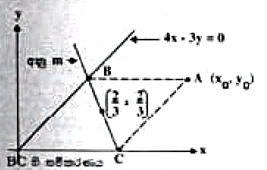
$\int \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-2)^2 (x-3)}$

$= \int \frac{9}{(x-2)} dx + \int \frac{3\, dx}{(x-2)^2} - \int \frac{8\, dx}{(x-3)}$

$= 9 \ln|x-2| + \frac{3(x-2)^{-1}}{-1} - 8 \ln|x-3|$

$= 9 \ln|x-2| - 8 \ln|x-3| - \frac{3}{(x-2)} + C$

07. (i)



BC හි සමීකරණය

$y - \frac{2}{3} = m\left(x - \frac{2}{3}\right)$

$3y = 3mx - 2m + 2$ —— ①

$4x - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 4x$

$4x = 3mx - 2m + 2$

$x(4 - 3m) = 2(-m + 1)$

$x = \frac{2(m-1)}{(3m-4)}$

$y = \frac{4 \times 2}{3}\left[\frac{m-1}{3m-4}\right] = \frac{8}{3}\left[\frac{m-1}{3m-4}\right]$

$B = \left[\frac{2(m-1)}{(3m-4)}, \frac{8}{3}\left(\frac{m-1}{3m-4}\right)\right]$

$C = \left(\frac{2(m-1)}{3m}, 0\right)$

(ii) $OB^2 = \frac{4(m-1)^2}{(3m-4)^2} + \frac{64(m-1)^2}{9(3m-4)^2}$

වර්ගමූලය ගත් විට OB බැවින්

$OB = \sqrt{\frac{100(m-1)^2}{9(3m-4)^2}} = \left|\frac{10(m-1)}{3(3m-4)}\right|$

$OC^2 = \frac{4(m-1)}{9m^2} \Rightarrow OC = \left|\frac{2(m-1)}{3m}\right|$

(iii) ABOC රොම්බසයක් නම්.

$OB = OC \Rightarrow \left|\frac{10(m-1)}{3(3m-4)}\right| = \left|\frac{2(m-1)}{3m}\right|$

$\frac{10 (m-1)}{3(3m-4)} = \pm \frac{2(m-1)}{3m}$; $m \neq 1$

$10m = \pm 6m \mp 8$

$10m \mp 6m = \mp 8$

$4m = -8$ හෝ $16m = 8$

$m = -2$ හෝ $m = \frac{1}{2}$

$A \equiv (x_0, y_0)$ නම්

$m = -2$ විට $B \equiv \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ $C \equiv (1, 0)$

$m = \frac{1}{2}$ විට $B \equiv \left(\frac{2}{5}, \frac{8}{15}\right)$ $C \equiv \left(\frac{-2}{3}, 0\right)$

$m = -2$ විට $\frac{x_0}{2} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{8}{5}$

$\frac{y_0}{2} = \frac{\frac{4}{5} + 0}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{4}{5}$

එවිට $A = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$

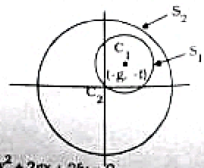
එසේම

$m = \frac{1}{2}$ විට $x_0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{15}$

$y_0 = \frac{8}{15}$

එවිට $A = \left(\frac{-4}{15}, \frac{8}{15}\right)$

08.



$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

හි කේන්ද්‍රය C_1 හා අරය r_1 නම් ද

$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 4r^2 = 0$ හි

කේන්ද්‍රය C_2 හා අරය r_2 නම්

C_2, O මූලලක්ෂ්‍යයයි වේ.

$C_1 \equiv (-g, -f)$ $C_2 \equiv (0, 0)$ $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2}$

$r_2 = 2|r|$

වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වේ නම්,

$r_1 + r_2 = C_1 C_2 = \sqrt{g^2 + f^2}$

එනම් $\sqrt{g^2 + f^2} + 2|r| = \sqrt{g^2 + f^2}$

$\Rightarrow r = 0$

මෙය විසංවාදයකි.

∴ වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ නොවේ.

වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේනම්,

$C_1 C_2 = |r_2 - r_1|$

එනම් $\sqrt{g^2 + f^2} = \left|2|r| - \sqrt{g^2 + f^2}\right|$

$g^2 + f^2 = 4|r|^2 - 4|r|\sqrt{g^2 + f^2} + g^2 + f^2$

$|r| = \sqrt{g^2 + f^2}$

එනම් $r^2 = g^2 + f^2$ නම් අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ හි පොදු ස්පර්ශකය

$S_1 - S_2 = 0$ මගින් ලැබේ.

එනම් $gx + fy + 2r^2 = 0$ ①

කේන්ද්‍ර දෙක යා කරන රේඛාව

$y = \frac{f}{g}x \Rightarrow fx - gy = 0$ —— ②

මෙම රේඛා දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය

① හා ② න් $x = \frac{-2gr^2}{f^2 + g^2}$ හා $y = \frac{-2fr^2}{g^2 + f^2}$

∴ පොදු ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$\left(\frac{-2gr^2}{f^2 + g^2}, \frac{-2fr^2}{g^2 + f^2}\right)$

$= (-2g, -2f)$

$(\because g^2 + f^2 = r^2$ වන බැවින්$)$

මූල ලක්ෂ්‍යය හා $0 < a < 1$ වන $(a, 0)$ හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2gx + 2gy = 0$ යයි සිතමු.

මෙය $(a, 0)$ හරහා යන බැවින් $a^2 + 2ga = 0$

$a > 0$ බැවින් $a = -2g$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බැවින්

$r^2 = 1$ වන බැවින් $g^2 + f^2 = 1$

$\frac{a^2}{4} + f^2 = 1$

$\Rightarrow f^2 = 1 - \frac{a^2}{4} = \frac{4 - a^2}{4}$

$\Rightarrow 2f = \pm\sqrt{4 - a^2}$

∴ $(a, 0)$ හා මූලය හරහා යමින් $x^2 + y^2 - 4 = 0$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන්නාවූ වෘත්ත දෙකක් පවතී.

එවිට ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය වල ඛණ්ඩාංක $(a, \sqrt{4 - a^2})$ හා $(a, -\sqrt{4 - a^2})$ එම ලක්ෂ්‍ය හා යන වෘත්තයේ විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය.

$\left(\frac{y - \sqrt{4 - a^2}}{x - a}\right)\left(\frac{y + \sqrt{4 - a^2}}{x - a}\right) = -1$

$\Rightarrow y^2 - 4 + a^2 = -x^2 + 2ax - a^2$

එනම් $x^2 + y^2 - 2ax + 2a^2 - 4 = 0$

09. (a)

(i) $\cos 4\theta - \cos 3\theta$

$= 2\cos^2 2\theta - 1 - (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= 2(\cos^2\theta - 1)^2 - 1 - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta$

$= 8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1$

(ii) $n \in \mathbb{Z}$ විට

$7\theta = 2n\pi$ නම් එවිට $4\theta = 2n\pi - 3\theta$

∴ $\cos 4\theta = \cos 3\theta$

එවිට $8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0$

මෙය $\cos\theta$ හි 4 වන මාත්‍රයේ සමීකරණයකි.

එහි විසඳුම් $\cos\theta = \cos\frac{2n\pi}{7}$,

$n = 0, 1, 2, 3$ වේ.

එනම් $\cos 0, \cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ වේ.

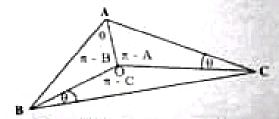
එවිට $\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

(b) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



AOB Δ න් $\frac{OB}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin(\pi - B)} = \frac{c}{\sin B}$

එනම් $OB = \frac{c\sin\theta}{\sin B}$

BOC Δ න් $\frac{OB}{\sin(C - \theta)} = \frac{a}{\sin(\pi - C)}$

එවිට $OB = \dfrac{a \sin (C - \theta)}{\sin C}$

එවිට $$\frac{a \sin (C - \theta)}{\sin C} = \frac{c \sin \theta}{\sin B}$$

$$\frac{a (\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta)}{\sin C} = \frac{c \sin \theta}{\sin B}$$

$$\frac{\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta}{\sin C \sin \theta} = \frac{c}{a \sin B}$$

$$\cot \theta - \cot C = \frac{c}{a \sin B} = \frac{c}{b \sin A}$$

$$= \frac{\sin C}{\sin B \sin A}$$

$$= \frac{\sin (\pi - \overline{A + B})}{\sin B \sin A} = \frac{\sin (A + B)}{\sin B \sin A}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin B \sin A}$$

$$= \cot B + \cot A$$

$\therefore \underline{\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C}$

*** ***