01. (a) $px^2 + qx + r = 0$

[illegible] α, β [illegible]

$\alpha + \beta = \frac{-q}{p}, \quad \alpha\beta = \frac{r}{p}$

$\alpha = \beta$ [illegible] $2\alpha = \frac{-q}{p}$ [illegible] $\alpha^2 = \frac{r}{p}$

[illegible] $\alpha = \frac{-q}{2p}$ [illegible] $\alpha^2 = \frac{r}{p}$

[illegible] $\left(\frac{-q}{2p}\right)^2 = \frac{r}{p}$

$\frac{q^2}{4p^2} = \frac{r}{p}$

[illegible] $q^2 = 4pr$

$\therefore px^2 + qx + r = 0$ [illegible]

$q^2 - 4pr = 0$ [illegible]

$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$

[illegible]

$b^2(c-a)^2 - 4\{a(b-c)\}\{c(a-b)\} = 0$

[illegible] $b^2(c^2 - 2ac + a^2) - 4ac(ab - b^2 - ac + bc) = 0$

[illegible] $b^2c^2 - 2ab^2c + a^2b^2 - 4a^2bc + 4ab^2c + 4a^2c^2 - 4abc^2 = 0$

[illegible] $b^2c^2 + a^2b^2 + 4a^2c^2 + 2b^2ac - 4a^2bc - 4abc^2 = 0$

$(bc + ab - 2ac)^2 = 0$

$a^2b^2c^2$ [illegible] $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{2}{b}\right)^2 = 0$

[illegible] $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$

(b) $E = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ [illegible]

b, c [illegible] E [illegible] a [illegible] $f(a)$ [illegible]

[illegible] $f(a) = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

[illegible] $f(b) = b^3(b-c) + b^3(c-b) + c^3(b-b) = 0$

[illegible] $f(c) = 0$

$f(-b-c) = -(b+c)^3(b-c) + b^3(c+b+c) + c^3(-b-c-b)$

$= -(b+c)^3(b-c) + (b+c)b^3 - (b+c)c^3 + b^3c - c^3b$

$= -(b+c)(b+c)^2(b-c) + (b+c)(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)$

$= -(b+c)(b-c)[(b+c)^2 - (b^2 + bc + c^2) - bc]$

$= -(b+c)(b-c)[b^2 + 2bc + c^2 - b^2 - bc - c^2 - bc]$

$= 0$

$\therefore (a-b), (a-c), (a+b+c)$ [illegible] $f(a)$ [illegible]

[illegible]

$f(a) = \lambda(a-b)(a-c)(a+b+c)$ [illegible]

a^3 [illegible] $\lambda = (b-c)$ [illegible]

$\therefore E = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ [illegible]

02. (a) (i) [illegible] 12 [illegible] 7 [illegible]

[illegible] $= {}^{12}C_7$

$= \frac{12!}{7!\,5!}$

$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!} \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$

$= 11 \times 9 \times 8$

$= \underline{792}$

(ii) [illegible] 12 [illegible] 6 [illegible]

[illegible] $= {}^{12}C_6$

[illegible] 6 [illegible]

$= \frac{1}{2} \times {}^{12}C_6$

$= \frac{1}{2} \times \frac{12!}{6!\,6!}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{12} \times 11 \times \cancel{10} \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}}$

$= 11 \times 6 \times 7 = 11 \times 42 = \underline{462}$

(iii) [illegible]

[illegible] $= {}^{10}C_4$

$= \frac{10!}{6!\,4!}$

$= \frac{10 \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}}$

$= \underline{210}$

(b) $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r} y^r$

[illegible] ${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$r = 0, 1, 2, \ldots n$

$3^{2n+1} = 3(3^2)^n = 3(2+7)^n$

දැන් $x = 2, y = 7$ විට

$3(x+y)^n = 3(2+7)^n$

$= 3[2^n + {}^nc_1 2^{n-1}7 + {}^nc_2 2^{n-2}7^2 + \dots {}^nc_r 2^{n-r}7^r + \dots {}^nc_n 7^n]$

$= 3(2^n) + 3.7\sum_{r=1}^{n} {}^nc_r 2^{n-r}7^{r-1}$

$= 3(2^n) + 7k$ ලෙස ගනිමු

මෙහි $k = 3\sum_{r=1}^{n} {}^nc_r 2^{n-r}7^{r-1} \in \mathbb{Z}$

දැන් $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k + 3(2^n) + 2^{n+2}$

$= 7k + 2^n[3+4]$

$= 7k + 7.2^n$

$= 7(k+2^n)$

එමනිසා $3^{2n+1} + 2^{n+2}$, 7 න් බෙදේ

03. $f(n) = p^{n+1} + (p+1)^{2n-1}$ යයි ගනිමු

$n = 1$ විට $f(1) = p^2 + (p+1)$

$= p^2 + p + 1 \ (\neq 0, \forall p \in \mathbb{Z})$

$\therefore n = 1$ විට $f(n)$, p^2+p+1 න් බෙදේ.

$n = k \in \mathbb{Z}^+$ විට ප්‍රකාශය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට

$f(k) = p^{k+1} + (p+1)^{2k-1} = r(p^2+p+1)$ ලෙස ලිය හැකි මෙහි $r \in \mathbb{Z}$

දැන් $f(k+1) = p^{k+2} + (p+1)^{2k+1}$

$= p.p^{k+1} + (p+1)^2(p+1)^{2k-1}$

$= p[p^{k+1} + p^{2k-1}] + (p^2+p+1)(p+1)^{2k-1}$

$= p[r(p^2+p+1)] + (p^2+p+1)(p+1)^{2k-1}$

$= (p^2+p+1)[rp + (p+1)^{2k-1}]$

$rp + (p+1)^{2k-1} \in \mathbb{Z}$ නිසා p^2+p+1 න් $f(k+1)$ බෙදේ

එනම් $n = k$ විට ප්‍රකාශය සත්‍ය නම් $n = k+1$ විට ද ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ

එමනිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා $f(n) = p^{n+1} + (p+1)^{2n-1}$, p^2+p+1 න් බෙදේ.

(b) $U_r = \dfrac{r}{1+r^2+r^4}$

(i) $U_r = \dfrac{r}{1+r^2+r^4} = \dfrac{1}{2}\left(f(r) - \dfrac{1}{1+r+r^2}\right)$

$\therefore f(r) = \dfrac{2r}{1+r+r^4} + \dfrac{1}{1+r+r^2}$

$= \dfrac{2r}{(1+r+r^2)(1-r+r^2)} + \dfrac{1}{1+r+r^2}$

$= \dfrac{1}{1+r+r^2}\left(\dfrac{2r}{1-r+r^2} + 1\right)$

$= \dfrac{1}{1+r+r^2}\left[\dfrac{2r+1-r+r^2}{1-r+r^2}\right]$

$= \dfrac{1}{1-r+r^2}$

(ii) $f(r+1) = \dfrac{1}{1-(r+1)+(r+1)^2}$

$= \dfrac{1}{1+r+r^2}$

$\therefore U_r = \dfrac{1}{2}[f(r) - f(r+1)]$

(iii) $r = 1$ විට $U_1 = \dfrac{1}{2}[f(1) - f(2)]$

$r = 2$, $U_2 = \dfrac{1}{2}[f(2) - f(3)]$

$r = n-1$ $U_{n-1} = \dfrac{1}{2}[f(n-1) - f(n)]$

$r = n$ $U_n = \dfrac{1}{2}[f(n) - f(n+1)]$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{1}{2}[f(1) - f(n+1)]$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cancel{1}+n+n^2-\cancel{1}}{1+n+n^2}\right)$

$= \dfrac{n(n+1)}{2(1+n+n^2)}$

04. $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$

$= \dfrac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{(\cos\beta + i\sin\beta)} \times \dfrac{(\cos\beta - i\sin\beta)}{(\cos\beta - i\sin\beta)}$

$= \dfrac{\cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta}$

$(\because i^2 = -1)$

$= \dfrac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{1}$

$= \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$

$\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} \times \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i}{1+3}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} + i\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{4}$

$\text{Re}\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, —— ① $\quad \text{Im}\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) = \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{4}$

$Z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$Z_2 = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය අනුව

$\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

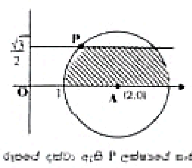
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right\}$

$\text{Re}\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{5\pi}{12}$ —— ②

① හා ② අනුව $\text{Re}\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

$\therefore \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(b)



රූපයේ දක්වා ඇති P ලක්ෂ්‍යයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව Z_0 යයි ගනිමු. $|Z_0 - 2| = 1$ මගින් දක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය A ලෙස ගනිමු

එවිට, $\text{Im } Z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ හා $|Z_0 - 2| = 1$

එවිට, $Z_0 = X_0 + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 1 < X_0 < 2$ අගයක් හා

$|X_0 + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2| = 1$

$\Rightarrow (X_0 - 2)^2 + \dfrac{3}{4} = 1$

$\Rightarrow (X_0 - 2)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow X_0 - 2 = \pm\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow X_0 = 2 \pm \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow X_0 = \dfrac{3}{2}$ $\quad (\because 1 < X_0 < 2$ නිසා$)$

එවිට $Z_0 = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

දැන් $OP = |Z_0| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$OP^2 + PA^2 = 3 + 1 = 2^2 = OA^2$

$\therefore O\hat{P}A = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ OP යනු P හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ.

$\therefore$ R පෙදෙස තුළ Arg Z උපරිම වන්නේ P හිදී ය. අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $= Z_0$

$= \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

05 (a) (i) $y = (1+4x^2)\tan^{-1}2x$

$\dfrac{dy}{dx} = (1+4x^2) \times \dfrac{1}{1+4x^2} \times 2 + (\tan^{-1}2x) \times 8x$

$= 2 + 8x\tan^{-1}2x$

$= 2 + \dfrac{8xy}{(1+4x^2)}$

$\therefore (1+4x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2(1+4x^2) + 8xy$

$(1+4x^2)\dfrac{dy}{dx} - 8xy = 2(1+4x^2)$ —— ①

(ii) ① න්

$(1+4x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} - 8x\dfrac{dy}{dx} - 8y = 2(8x)$

$\Rightarrow (1+4x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8y = 16x$ —— ②

(iii) ② න්

$(1+4x^2)\dfrac{d^3y}{dx^3} + 8x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} = 16$

$x = 0$ විට $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} - 8\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 16$

නමුත් ① න් $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 2$

$\therefore \left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} - 8 \times 2 = 16$

$\Rightarrow \left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = 32$

(b) සිලින්ඩරයේ අරය r cm හා උස h cm යැයි විට

$\pi r^2 h = 1024\pi$

$\therefore h = \dfrac{1024}{r^2}$

සිලින්ඩරයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S නම්

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi\left(r.\frac{1024}{r^2} + r^2\right) = 2\pi\left(\frac{1024}{r} + r^2\right)$$

එවිට $\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(-\frac{1024}{r^2} + 2r\right)$

දැන් $\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow \frac{1024}{r^2} = 2r \Leftrightarrow r^3 = 512 = 8^3$

$\Leftrightarrow r = 8$

දැන් $0 < r < 8$ විට $\frac{dS}{dr} < 0$

$8 < r$ විට $\frac{dS}{dr} > 0$

∴ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවමවන්නේ සිලින්ඩරයේ අරය 8 cm වේ.

06. (a) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cos x + \sin x}$ ලෙස ගනිමු.

$t = \tan x/2$ ලෙස ගැනීමෙන්

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ සහ $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ වේ.

එවිට $I = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 2\frac{(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{3(1+t^2)+2(1-t^2)+2t}$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2t+5} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2+4}$$

$$= \left[\frac{2}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

(b) $I = \int e^{4x}\sin 3x\,dx$

කොටස් වශයෙන් අනුකලනයෙන්

$$I = \frac{1}{4}\int \sin 3x \frac{d}{dx}(e^{4x})\,dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x - \frac{1}{4}\int e^{4x}\,3\cos 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x - \frac{3}{4}\int \cos 3x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{4x}}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x - \frac{3}{16}e^{4x}\cos 3x + \frac{3}{16}\int e^{4x}(-3\sin 3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x - \frac{3}{16}e^{4x}\cos 3x - \frac{9}{16}\int e^{4x}\sin 3x\,dx$$

$$= \frac{e^{4x}}{16}[4\sin 3x - 3\cos 3x] - \frac{9}{16}I$$

$$\frac{25}{16}I = \frac{e^{4x}}{16}[4\sin 3x - 3\cos 3x]$$

$$I = \frac{e^{4x}}{25}[4\sin 3x - 3\cos 3x]$$

$\therefore \int e^{4x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{4x}}{25}[4\sin 3x - 3\cos 3x] + C$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

(c) $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$

එනම් $1 = (A+B)x^2 + (B-A+C)x + (A+C)$

x^2, x හා x^0 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

$A + B = 0$, $B - A + C = 0$, $A + C = 1$

සමීකරණ තුන විසඳීමෙන් $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$

එවිට $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{(x-2)}{x^2-x+1}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\right)$$

$$\therefore \int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

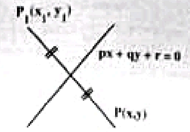
$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{(x-\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

C අභිමත නියතයකි.

07.



$px + qy + r = 0$ රේඛාව තුළින් $P_1(x_1, y_1)$ හි ප්‍රතිබිම්බය $P(x, y)$ යැයි සිතමු. එවිට P_1P, $px + qy + r = 0$ රේඛාවට ලම්බ වන අතර P_1P හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය එම රේඛාව මත වේ.

P_1 හරහා $px + qy + r = 0$ ට ලම්බ ව ඇඳි රේඛාවේ සමීකරණය $y - y_1 = q/p\,(x - x_1)$

$\Rightarrow \frac{y-y_1}{q} = \frac{x-x_1}{p} = t$ (යැයි සිතමු)

එවිට $x = x_1 + pt$, $y = y_1 + qt$ වේ.

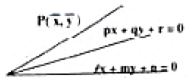
දැන් P_1P හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $px + qy + r = 0$ මත බැවින්

$$p\left(x_1 + \frac{pt}{2}\right) + q\left(y_1 + \frac{qt}{2}\right) + r = 0$$

$$\Rightarrow px_1 + qy_1 + r + \frac{1}{2}(p^2+q^2) = 0$$

$\Rightarrow t = -2\frac{(px_1 + qy_1 + r)}{p^2+q^2} = -\lambda$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $\lambda = 2\frac{(px_1 + qy_1 + r)}{p^2+q^2} \Rightarrow P \equiv (x_1 - \lambda p, y_1 - \lambda q)$ වේ.



$px + qy + r = 0$ රේඛාව තුළින් $lx + my + n = 0$ රේඛාවේ ප්‍රතිබිම්බය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් $P(\bar{x}, \bar{y})$ යැයි සිතමු.

මෙවිට $px + qy + r = 0$ තුළින් P හි ප්‍රතිබිම්බය $lx + my + n = 0$ මත බැවින්

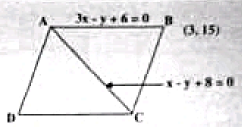
$$l(\bar{x} - \lambda p) + m(\bar{y} - \lambda q) + n = 0$$

මෙහි $\lambda = 2\frac{(p\bar{x} + q\bar{y} + r)}{p^2+q^2}$ වේ.

එනම් $l\bar{x} + m\bar{y} + n - 2\frac{(p\bar{x} + q\bar{y} + r)(lp + mq)}{p^2+q^2} = 0$

මෙලෙස $px + qy + r = 0$ රේඛාව තුළින් $lx + my + n = 0$ රේඛාවේ ප්‍රතිබිම්බය

$$lx + my + n - 2\frac{(lp + mq)(px + qy + r)}{p^2+q^2} = 0$$



සමාන්තරාස්‍රයක ... විකර්ණ ... AD යනු $x - y + 8 = 0$ තුළින් $3x - y + 6 = 0$ හි ප්‍රතිබිම්බය වේ. එබැවින් AD හි සමීකරණය

$$3x - y + 6 - 2\frac{(1\times 3 + (-1)(-1))(x - y + 8)}{1+1} = 0$$

එනම් $3x - y + 6 - 4(x - y + 8) = 0$

$x - 3y + 26 = 0$

BC, AD ට සමාන්තර බැවින් BC හි සමීකරණය

$$y - 15 = \frac{1}{3}(x - 3)$$

එනම් $x - 3y + 42 = 0$

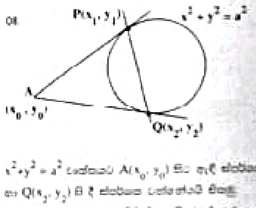
දැන් CD යනු $x - y + 8 = 0$ තුළින් $x - 3y + 42 = 0$ හි ප්‍රතිබිම්බය බැවින් එහි සමීකරණය

$$x - 3y + 42 - 2\frac{(1\times 1 + (-1)(-3))(x - y + 8)}{1+1} = 0$$

එනම් $x - 3y + 42 - 4(x - y + 8) = 0$

එනම් $3x - y - 10 = 0$

08.



$x^2 + y^2 = a^2$ වෘත්තයට $A(x_0, y_0)$ සිට ඇඳි ස්පර්ශක $P(x_1, y_1)$ හා $Q(x_2, y_2)$ හි දී ස්පර්ශ වන්නේ යැයි සිතමු.

(x_1, y_1) හා (x_2, y_2) හිදී වූ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක සමීකරණ $xx_1 + yy_1 = a^2$ හා $xx_2 + yy_2 = a^2$ වේ.

ඒවා (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින්

$x_0x_1 + y_0y_1 = a^2$ ——— ①

$x_0x_2 + y_0y_2 = a^2$ ——— ② වේ.

① හා ② අනුව $x_0x + y_0y = a^2$, (x_1, y_1) හා (x_2, y_2) ලක්ෂ්‍ය හරහා යන රේඛාවයි.

තවද ④ x හා y පළමු මාත්‍රයේ බැවින් සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරයි.
එනම් ④ මගින් (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි ස්පර්ශක වල ස්පර්ශ ජ්‍යාය නිරූපණය කරයි.

$\therefore (x_0, y_0)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 = a^2$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක වල ස්පර්ශ ජ්‍යාය

$x_0x + y_0y = a^2$ වේ

$(1, 1)$ සහ $(-1, 0)$ හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යයි සිතමු

එවිට $1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$ හා

$1 + 0 - 2g + 0 + c = 0$ වේ

එනම් $2g + 2f + c + 2 = 0$ —— ① හා

$2g - c - 1 = 0$ —— ② වේ

① හා ② න් $2g + 2f + 2g - 1 + 2 = 0$

එනම් $2f = -(4g + 1)$

එවිට ඉහත වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 + 2gx - (4g+1)y + 2g - 1 = 0$ —— ③

$S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$

දැන් $S = 0$ හා ③ වෘත්තයේ පොදු ජ්‍යාය

$2gx - (4g+1)y + 2g - 1 + a^2 = 0$ —— ④

$R \equiv (x_0, y_0)$ ලෙස ගනිමු. එවිට R සිට $S = 0$ ට ඇඳි ස්පර්ශක වල ස්පර්ශ ජ්‍යාය $x_0x + y_0y - a^2 = 0$ වන අතර එය ④ න් නිරූපණය වන රේඛාවම වේ.

එවිට $\dfrac{x_0}{2g} = \dfrac{y_0}{-(4g+1)} = \dfrac{-a^2}{2g - 1 + a^2}$

$x_0 = \dfrac{-2a^2g}{2g - 1 + a^2}$ හා $y_0 = \dfrac{a^2(4g+1)}{2g - 1 + a^2}$

$2g\,x_0 + (a^2 - 1)x_0 = -2a^2g\ ,\ 2gy_0 + (a^2-1)y_0 = 4a^2g + a^2$

$2g(x_0 + a^2) = (1 - a^2)x_0 ;\ 2g(y_0 - 2a^2) = (1 - a^2)y_0 + a^2$

$\dfrac{(1 - a^2)x_0}{x_0 + a^2} = \dfrac{(1 - a^2)y_0 + a^2}{y_0 - 2a^2}$

$(1 - a^2)x_0(y_0 - 2a^2) = (x_0 + a^2)(1 - a^2)y_0 + (x_0 + a^2)a^2$

$\Rightarrow (1 - a^2)x_0y_0 - 2(1 - a^2)a^2x_0$

$= (1 - a^2)x_0y_0 + (1 - a^2)a^2y_0 + a^2(x_0 + a^2)$

$\Rightarrow -2a^2x_0 + 2a^4x_0 = a^2y_0 - a^4y_0 + a^2x_0 + a^4$

$\Rightarrow (2a^2 - 3)x_0 + (a^2 - 1)y_0 - a^2 = 0$

$\therefore$ R පථය $(2a^2 - 3)x + (a^2 - 1)y - a^2 = 0$ රේඛාව මත වේ.

09. (a) (i) $\sin 3\theta = \cos 2\theta$

$\Leftrightarrow \cos(\pi/2 - 3\theta) = \cos 2\theta$

සාධාරණ $\pi/2 - 3\theta = 2n\pi \pm 2\theta$ මෙහි $n \in \mathbb{Z}$

එනම් $5\theta = \pi/2\,(1 - 4n)$ හෝ $\theta = \pi/2\,(1 - 4n)$ —— ②

$\theta = \pi/10\,(1 - 4n)$ —— ①

$n = 0$ විට ① න් $\theta = \pi/10 = 18°$

$\therefore \theta = 18°$, $\sin 3\theta = \cos 2\theta$ හි විසඳුමකි

තවද $\sin 3\theta = \cos 2\theta$

$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$

බැවින් $\theta = 18°$ මෙම සමීකරණයේ ද විසඳුමක් වේ

$0 < \sin 18° < 1$ අගය ගැනීම බැවින් $\sin 18° - 1 \neq 0$

$\therefore \theta = 18°$, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$ හි මූලයකි

එවිට $\sin 18° = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4(-1)}}{2 \times 4}$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\therefore \sin 18° = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}}}$ $(\because 0 < \sin 18° < 1)$

(ii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \alpha$ හා $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right) = \beta$ ලෙස ගනිමු

එවිට, $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{7}$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ හා $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$ වේ

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{8} = \dfrac{3}{4}$

දැන් $2\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} = 2\alpha + \beta$

එවිට $\tan(2\alpha + \beta) = \dfrac{\tan 2\alpha + \tan\beta}{1 - \tan 2\alpha \tan\beta}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$

$0 < 2\alpha + \beta < 3\pi/4$ බැවින් $2\alpha + \beta = \pi/4$

$\therefore 2\tan^{-1} 1/3 + \tan^{-1} 1/7 = \pi/4$ —— ①

$\tan^{-1} 2/11 = \delta$ නම් $\tan\delta = 2/11$ $\quad 0 < \delta < \pi/4$

එවිට $\tan^{-1} 1/7 + \tan^{-1} 2/11 = \beta + \delta$

දැන් $\tan(\beta + \delta) = \dfrac{\tan\beta + \tan\delta}{1 - \tan\beta\tan\delta} = \dfrac{\frac{1}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{11}} = \dfrac{\frac{25}{77}}{\frac{75}{77}}$

$= \dfrac{1}{3}$

$0 < \beta + \delta < \pi/2$ බැවින් $\quad \beta + \delta = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$

$\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + \tan^{-1}\dfrac{2}{11} = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ —— ②

① හා ② $2(\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + \tan^{-1}\dfrac{2}{11}) + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} = \pi/4$

$3\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + 2\tan^{-1}\dfrac{2}{11} = \pi/4$

(b) සයින් නීතිය -
ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් විට

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$ A, B, C කෝණ

හා අනුරූප පාද වල දිග a, b, c සම්මත අංකනය අනුව ගෙන ඇත

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} = k$ ලෙස ගනිමු

එවිට $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = k^2(b^2 + c^2 - a^2)$

දැන් L.H.S $= \sin^2 B + (\sin C - \sin A)(\sin C + \sin A)$

$= \sin^2 B + 2\cos\dfrac{C + A}{2}\sin\dfrac{C - A}{2} \cdot 2\sin\dfrac{C + A}{2}\cos\dfrac{C - A}{2}$

$= \sin^2 B + \sin(C + A) \cdot \sin(C - A)$

$= \sin^2 B + \sin(\pi - B) \cdot \sin(C - A)$

$= \sin^2 B + \sin B \sin(C - A)$

$= \sin B\,[\sin B + \sin(C - A)]$

$= \sin B\,[2\sin\dfrac{B + C - A}{2}\cos\dfrac{B + A - C}{2}]$

$= 2\sin B\sin(\pi/2 - A)\cos(\pi/2 - C)$

$= 2\sin B\sin C\cos A = 2kb \cdot kc\cos A$

$= 2k^2 bc\cos A$

$\therefore 2k^2 bc\cos A = k^2(b^2 + c^2 - a^2)$

$\therefore \cos A = \underline{\underline{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}}$

(i) $\dfrac{b + c}{5} = \dfrac{c + a}{6} = \dfrac{a + b}{7} \Rightarrow$

$\dfrac{b + c}{5} = \dfrac{c + a}{6}$ $\qquad \dfrac{c + a}{6} = \dfrac{a + b}{7}$

$6b + 6c = 5c + 5a$ $\qquad 7c + 7a = 6a + 6b$

$c = 5a - 6b$ —— ① $\qquad 7c = -a + 6b$ —— ②

① + ② $8c = 4a$ $\qquad$ ② න් $6b = 7c + 2c$

$c = \dfrac{a}{2}$ $\qquad \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{2}$

$\therefore \dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{2}$

$a = k\sin A,\ b = k\sin B,\ c = k\sin C$ බැවින්

$\dfrac{\sin A}{4} = \dfrac{\sin B}{3} = \dfrac{\sin C}{2}$

(ii) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}}{2}$

$= \dfrac{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{2}}{2}$

$= \dfrac{9 + 4 - 16}{6 \times 2} = \dfrac{-3}{12} = -\dfrac{1}{4}$

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b}{c}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{2} + \dfrac{2}{4} - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{16 + 4 - 9}{8}\right) = \dfrac{11}{16}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - \dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{16 + 9 - 4}{12} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{21}{12} = \dfrac{7}{8}$

එබැවින් $\underline{\dfrac{\cos A}{-1} = \dfrac{4\cos B}{11} = \dfrac{2\cos C}{7}}$

******