01. α, β යනු $x^2 + bx + c = 0$ හි මූල නම්

(a) $\alpha + \beta = -b \qquad \alpha\beta = c$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$
$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
$= (-b)^3 - 3c(-b) = -(b^3 - 3bc)$

$\alpha^3\beta^3 = c^3$

α^3, β^3 මූල වූ වර්ගජ සමීකරණය

$\underline{x^2 + (b^3 - 3bc)x + c^3 = 0}$

$\alpha^3 + \dfrac{1}{\beta^3} = \dfrac{\alpha^3\beta^3 + 1}{\beta^3}, \quad \beta^3 + \dfrac{1}{\alpha^3} = \dfrac{\alpha^3\beta^3 + 1}{\alpha^3}$

$= \dfrac{c^3 + 1}{\beta^3} \qquad = \dfrac{c^3 + 1}{\alpha^3}$

$y = \dfrac{c^3 + 1}{x}$ ලෙස ගනිමු.

$x = \alpha^3$ විට $y = \dfrac{c^3 + 1}{\alpha^3} = \beta^3 + \dfrac{1}{\alpha^3}$ ද

$x = \beta^3$ විට $y = \dfrac{c^3 + 1}{\beta^3} = \alpha^3 + \dfrac{1}{\beta^3}$ වේ.

$x = \dfrac{c^3 + 1}{y}$, $x^2 + (b^3 - 3bc)x + c^3 = 0$ හි

ආදේශයෙන්

$$\left(\frac{c^3 + 1}{y}\right)^2 + (b^3 - 3bc)\left(\frac{c^3 + 1}{y}\right) + c^3 = 0$$

එනම් $c^3y^2 + (b^3 - 3bc)(c^3 + 1)y + (c^3 + 1)^2 = 0$

එනම් $\alpha^3 + \dfrac{1}{\beta^3}$ හා $\beta^3 + \dfrac{1}{\alpha^3}$ මූල වූ වර්ගජ සමීකරණය

$c^3x^2 + (b^3 - 3bc)(c^3 + 1)x + (c^3 + 1)^2 = 0$ ✓

(b) $f(x)$, $(x - 1)$ න් බෙදූ විට ලබ්ධිය $Q(x)$ හා ශේෂය ν නම්

$f(x) = Q(x)(x - 1) + \nu$

$Q(x)$, $(x - 2)$ න් බෙදූ විට ලබ්ධිය $R(x)$ ද ශේෂය μ ද නම්

$Q(x) = R(x)(x - 2) + \mu$

එවිට $f(x) = [R(x)(x - 2) + \mu](x - 1) + \nu$
$= R(x)(x - 1)(x - 2) + \mu(x - 1) + \nu$

$R(x)$, $(x - 3)$ න් බෙදූ විට ලබ්ධිය $S(x)$ හා ශේෂය λ නම්

$R(x) = S(x)(x - 3) + \lambda$

එවිට $f(x) = [S(x)(x - 3) + \lambda](x - 1)(x - 2) + \mu(x - 1) + \nu$

$= S(x)(x - 1)(x - 2)(x - 3) + \lambda(x - 1)(x - 2) + \mu(x - 1) + \nu$

$\therefore (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ න් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $\lambda(x - 1)(x - 2) + \mu(x - 1) + \nu$ වේ.

$f(1) = a = \nu, \; f(2) = b = \mu + \nu, \; f(3) = c = 2\lambda + 2\mu + \nu$

$\mu = b - a, \; \lambda = \dfrac{1}{2}(c - 2b + a)$

02. (a) (i) [illegible] $= {}^9C_3$

$${}^9C_3 = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!\,3!} = \frac{\cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4} \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}$$

$= 84$

[illegible] $= \underline{84}$

(ii) [illegible]

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]

1 [illegible]
$= {}^3C_2 \times {}^4C_3 \times {}^4C_3$
$= 3 \times 4 \times 4 = 48$

2 [illegible]
$= 3 \times 2 \times 1 \times {}^4C_3 \times {}^4C_2 \times {}^4C_1$
$= 6 \times 4 \times 6 \times 4 = 576$

3 [illegible]
$= 1 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2$
$= 1 \times 6 \times 6 \times 6 = 216$

[illegible] $= 48 + 576 + 216 = 840$

(iii) [illegible]

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]

1 [illegible]
$= {}^3C_1 \times {}^3C_3 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1$
$= 3 \times 1 \times 4 \times 4 = 48$

2. [illegible]
$= 3 \times 2 \times 1 \times {}^4C_3 \times {}^4C_2 \times {}^4C_1$
$= 6 \times 4 \times 6 \times 4$
$= 576$

3. ... සංයෝජන ගණන
$= 1\times{}^4C_2\times{}^4C_2\times{}^4C_2$
$= 1\times6\times6\times6 = 216$
... සංයෝජන ගණන $= 48 + 576 + 216$
$= \underline{840}$

(b) ද්විපද ප්‍රමේයය - n ධන නිඛිලයක් විට
$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + \dots {}^nC_rx^{n-r}y^r + \dots + y^n$

මෙහි ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ වේ.

$a^n = (b+d)^n = b^n + {}^nC_1b^{n-1}d + {}^nC_2b^{n-2}d^2 + \dots {}^nC_rb^{n-r}d^r + \dots + d^n$

$a^n - b^{n-1}(b+nd) = d^2({}^nC_2b^{n-2} + \dots {}^nC_rb^{n-r}d^{r-2} + \dots + d^{n-2})$

එමනිසා ධන නිඛිලමය n සඳහා
$a^n - b^{n-1}(b+nd)$, d^2 න් බෙදේ.
$u = a + (n-1)d = (a-d) + nd$
$a^n - (a-d)^{n-1}u = a^n - (a-d)^{n-1}\{(a-d)+nd\}$
$= a^n - b^{n-1}(b+nd)$ මෙහි $a = b+d$
ඉහත ප්‍රතිඵලය අනුව $a^n - (a-d)^{n-1}u$, d^2 න් බෙදේ.
$7^{60} - 3^{64} = 7^{60} - (7-4)^{60-1}\{(7-4)+60\times4\}$
ඉහත ප්‍රතිඵලය අනුව $4^2 = 16$ න් මෙම ප්‍රකාශය බෙදේ.

03. (a) $f(n) = \frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{34n}{105}$

n=1 විට $f(1) = \frac17+\frac15+\frac13+\frac{34}{105} = \frac{15+21+35+34}{105}$

$= \frac{105}{105} = 1$

∴ n = 1 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
n = p වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.
එවිට $f(p) = \frac{p^7}{7}+\frac{p^5}{5}+\frac{p^3}{3}+\frac{34p}{105} = k\in\mathbb{Z}$
n = p + 1 විට
$f(p+1) = \frac{(p+1)^7}{7}+\frac{(p+1)^5}{5}+\frac{(p+1)^3}{3}+\frac{34(p+1)}{105}$
$= \frac{p^7+7p^6+21p^5+35p^4+35p^3+21p^2+7p+1}{7}$
$+ \frac{p^5+5p^4+10p^3+10p^2+5p+1}{5}$
$+ \frac{p^3+3p^2+3p+1}{3} + \frac{34p+34}{105}$

$= \frac{p^7}{7}+\frac{p^5}{5}+\frac{p^3}{3}+\frac{34p}{105}+\frac{7(p^6+3p^5+5p^4+5p^3+3p^2+p)}{7}$
$+ \frac{5(p^4+2p^3+2p^2+p)}{5}+\frac{3(p^2+p)}{3}+\frac17+\frac15+\frac13+\frac{34}{105}$

$= f(p) + f(1) + (p^6+3p^5+6p^4+7p^3+6p^2+3p)$
$= k'$ නිඛිලයකි
එමනිසා n = p විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් n = p + 1 විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා f(n) නිඛිලයක් වේ.

$u_r = \frac{r+2}{r(r+1)}\left(\frac12\right)^r$

$u_r = \frac{r+2}{r(r+1)}\left(\frac12\right)^r = \frac1r\left(\frac12\right)^{r-1} - \frac{1}{(r+1)}\left(\frac12\right)^r$

$= f(r-1) - f(r)$

මෙහි $f(r) = \frac{1}{(r+1)}\left(\frac12\right)^r$

r = 1 විට $u_1 = f(0) - f(1)$
r = 2 විට $u_2 = f(1) - f(2)$
$\vdots$
r = n-1 විට $u_{n-1} = f_{(n-2)} - f_{(n-1)}$
r = n විට $u_n = f_{(n-1)} - f_{(n)}$

$\sum_{r=1}^{n} u_r = f_{(0)} - f_{(n)}$

$= 1 - \frac{1}{(n+1)}\left(\frac12\right)^n$

එමනිසා $S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r = 1 - \frac{1}{(n+1)}\left(\frac12\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \frac{1}{(n+1)}\left(\frac12\right)^n\right\} = 1$

04. (a) $z_1 = \frac{\sqrt3}{2} + i\frac12 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \mathrm{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{6}$

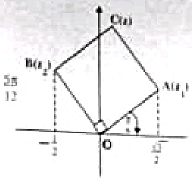
$z_2 = -\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{Arg}(z_2) = \frac{2\pi}{3}$

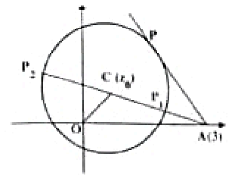
C ලක්ෂ්‍යයෙන් z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දක්වේ යැයි සිතමු.
$OC^2 = OA^2 + AC^2 = OA^2 + OB^2$
$|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$
$= 2\ (\because |z_1| = |z_2| = 1)$

∴ $|z| = \sqrt2$
$A\hat{O}C = \frac{\pi}{4}$

∴ $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$



(b) (i) $z_0 = \frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}$ මගින් ඇති C ලක්ෂ්‍යයෙන් දක්වෙයි. ... P නම් ලක්ෂ්‍යයෙන් z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දක්වෙන විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් යැයි සිතමු.
$|z - z_0| \le 2 \Rightarrow CP \le 2$

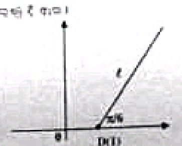


P ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍රය C වූ අරය 2 වූ වෘත්තය තුළ හෝ මත පිහිටිය යුතු.
$|z-3| = AP$ වේ
$|z-3|$ හි විශාලතම අගය AP_2 මගින් ද
අඩුතම අගය AP_1 මගින් ද දක්වේ.

$AC = \sqrt{\left(\frac12 - 3\right)^2 + \frac34} = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac34} = \sqrt7$

∴ $AP_1 = \sqrt7 - 2$ හා $AP_2 = \sqrt7 + 2$ වේ.
∴ $|z-3|$ අවම අගය $\sqrt7 - 2$ හා විශාලතම අගය $\sqrt7 + 2$

(ii) ...



ℓ සරල රේඛා කොටසෙන් $\mathrm{Arg}(z-1) = \pi/6$ නිරූපණය කරයි.

05. (a) (i) $\frac{d(xe^x)}{dx} = xe^x + e^x = (x+1)e^x$

එමනිසා r = 1 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
r = p විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට $\frac{d^p(xe^x)}{dx^p} = (x+p)e^x$

r = p + 1 විට $\frac{d^{p+1}(xe^x)}{dx^{p+1}} = \frac{d(x+p)e^x}{dx}$
$= (x+p)e^x + e^x$
$= (x+\overline{p+1})e^x$

එමනිසා r = p + 1 විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය r සඳහා

$\frac{d^r(xe^x)}{dx^r} = (x+r)e^x$ වේ.

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2e^x)}{dx} = 2xe^x + x^2e^x = 2xe^x + y$

$\frac{d^ry}{dx^r} = \frac{d^{r-1}(2xe^x+y)}{dx^{r-1}} = \frac{2d^{r-1}(xe^x)}{dx^{r-1}} + \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}$

$\frac{d^ry}{dx^r} - \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} = 2(x+r-1)e^x$

r = 1 විට
$\frac{dy}{dx} - y = 2xe^x$

r = 2 විට
$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2(x+1)e^x$

r = n - 1 විට $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = 2(x+n-2)e^x$

r = n විට $\frac{d^ny}{dx^n} - \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 2(x+n-1)e^x$

$\frac{d^ny}{dx^n} - y = 2nxe^x + 2e^x\sum_{r=1}^{n-1} r$
$= \{2nx + (n-1)n\}e^x$
$= n(2x+n-1)e^x$

එමනිසා $\frac{d^ny}{dx^n} = \underline{n(2x+n-1)e^x + y}$

(b) $P(x, y)$ හි පරාමිතික ඛණ්ඩාංක (at^2, at^3) නම්

$$\frac{dx}{dt} = 2at,\ \frac{dy}{dt} = 3at^2 \text{ විට } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t}{2}$$

$Q = (aT^2, aT^3)$ ලෙස ගනිමු

විට PQ හි අනුක්‍රමණය $= \frac{a(T^3 - t^3)}{a(T^2 - t^2)}$

$$= \frac{(T-t)(T^2 + tT + t^2)}{(T-t)(T+t)} = \frac{3t}{2}$$

$T \neq t$ නිසා

$$\frac{T^2 + tT + t^2}{T+t} = \frac{3t}{2} \Rightarrow 2T^2 - tT - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2T + t)(T - t) = 0 \Rightarrow T = -\frac{t}{2}\ (\because T \neq t)$$

$$\therefore \underline{\underline{Q = \left(\frac{1}{4}at^2,\ -\frac{1}{8}at^3\right)}}$$

06. (a) $$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

$x^3 + 1 \equiv A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$

$x = 0$ විට $\quad A = -1$

$x = 1$ විට $\quad D = 2$

$x = 2$ විට $\quad 9 = A + 2B + 2C + 2D$

$\Rightarrow B + C = 3$ —— ①

$x = -1$ විට $0 = -8A - 4B + 2C - D$

$\Rightarrow 2B - C = 3$ —— ②

① හා ② න් $\quad 3B = 6 \Rightarrow B = 2$ හා $C = 1$

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx = -\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + C'$$

$= C'$ අභිමත නියතයකි

(b) $25\cos x + 15 \equiv A(3\cos x + 4\sin x + 5) + B(-3\sin x + 4\cos x) + C$

කොසයින් පදවල සංගුණක සැසඳීමෙන්

$3A + 4B = 25$

සයින් පදවල සංගුණක සැසඳීමෙන් $4A - 3B = 0$

නියත පද සැසඳීමෙන් $\quad 5A + C = 15$

$A = 3, B = 4, C = 0$

$$\int \frac{25\cos x + 15}{3\cos x + 4\sin x + 5}dx$$

$$= 3\int dx + 4\int\frac{-3\sin x + 4\cos x}{(3\cos x + 4\sin x + 5)}dx$$

$$= 3x + 4\ln|3\cos x + 4\sin x + 5| + C'$$

මෙහි C' අභිමත නියතයකි

(c) $$\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^5 x\,d(-\cos x)$$

$$= [-\cos x\sin^5 x]_0^{\pi/2} + 5\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^2 x\,dx$$

$$= 5\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx - 5\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^3 x\,d(-\cos x)$$

$$= [-\cos x\sin^3 x]_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx - 3\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$$

$$4\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx = 3\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin x\,d(-\cos x)$$

$$= [-\sin x\cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}(1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$2\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}dx = [x]_0^{\pi/2} = \pi/2$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = \pi/4$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{32}$$

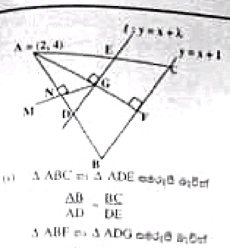
$y = 3x$ ලෙස ගනිමු. විට $dy = 3\,dx$ හා $x = 0$ විට $y = 0$

$x = \pi/6$ විට $y = \pi/2$ වේ.

$$\therefore \int_0^{\pi/6}\sin^6 3x\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^6 y\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{5\pi}{32} = \underline{\frac{5\pi}{96}}$$

07.



(i) Δ ABC හා Δ ADE සමරූපී බැවින්

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Δ ABF හා Δ ADG සමරූපී බැවින්

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AG}$$

එමනිසා $\frac{BC}{DE} = \frac{AF}{AG}$

දැන් $$\frac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \frac{\frac{1}{2}BC\cdot AF}{\frac{1}{2}DE\cdot AG} = \frac{AF^2}{AG^2} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AG} = \frac{3}{2}$$

AF මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් $P(x, y)$ ලෙස ගනිමු

විට $\frac{y-4}{x-2} = -1$

$\frac{y-4}{-1} = \frac{x-2}{1} = t$ ලෙස ගනිමු

විට $x = 2 + t$ හා $y = 4 - t$

$\therefore$ AF මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක් $(2 + t, 4 - t)$ ආකාරයට දැක්විය හැක

P ලක්ෂ්‍යය F වන විට $2 + t - 4 + t + 1 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$

එබැවින් $F = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$G = (x_0, y_0)$ ලෙස ගනිමු

$AG : GF = 2 : 1$ බැවින්

$$x_0 = \frac{2\times\frac{5}{2} + 2}{3} \text{ හා } y_0 = \frac{2\times\frac{7}{2} + 4}{3}$$

$$G = \left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

l හි සමීකරණය $y = x + \lambda$ වේ. l මත G පිහිටන නිසා

$$\frac{11}{3} = \frac{7}{3} + \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

$\therefore l$ හි සමීකරණය $y = x + \frac{4}{3}$

(ii) $AG^2 = AN^2 + NG^2 = AN^2 + NM^2 = AM^2$

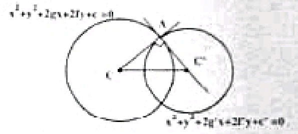
$AG = AM$

$$AG = \sqrt{\left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{11}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

එනම් AM නියත දිගකින් යුක්තයි

එබැවින් M, A කේන්ද්‍රය වූ අරය $\frac{\sqrt{2}}{3}$ වූ වෘත්තයක් මත පිහිටයි.

08.



වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම්

$CC'^2 = CA^2 + C'A^2$

$(g - g')^2 + (f - f')^2 = (g^2 + f^2 - c) + (g'^2 + f'^2 - c')$

$g^2 + g'^2 - 2gg' + f^2 + f'^2 - 2ff' = g^2 + f^2 - c + g'^2 + f'^2 - c'$

$\underline{\underline{2gg' + 2ff' = c + c'}}$

$x^2 + y^2 + 4x + 2\lambda y - 6 = (x + 2)^2 + y^2 + 2\lambda y - 10 = 0$

λ හි සියලු අගයන් සඳහා $(-2 + \sqrt{10}, 0)$ හා $(-2 - \sqrt{10}, 0)$ ලක්ෂ්‍යයන් ඉහත වෘත්තයේ සමීකරණය තෘප්ත කරයි. එනයින් $x^2 + y^2 + 4x + 2\lambda y - 6 = 0$ මඟින් $(-2 + \sqrt{10}, 0)$ හා $(-2 - \sqrt{10}, 0)$ හරහා යන වෘත්ත පද්ධතියක් නිරූපණය කෙරේ.

ඉහත වෘත්ත පද්ධතියේ වෘත්තයක්

$S \equiv x^2 + y^2 + 4x + 2\lambda_0 y - 6 = 0$ ලෙස ගනිමු

මෙම වෘත්තය $x^2 + y^2 + 4x + 2\lambda y - 6 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරයි නම්

$2.2.2 + 2\lambda_0\lambda = -6 - 6$ එනම් $\lambda = \frac{-10}{\lambda_0}$

මෙහි λ සඳහා එක අගයක් පමණක් ලැබෙන බැවින් $S \equiv x^2 + y^2 + 4x + 2\lambda_0 y - 6 = 0$ මඟින් දැක්වෙන වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන එක් වෘත්තයක් පමණක් ඉහත වෘත්ත පද්ධතිය තුළ වේ.

එය $S' = 0$ නම්

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 4x - \frac{20}{\lambda_0}y - 6 = 0$$

$S \equiv x^2 + y^2 + 4x + 4y - 6 = 0$ විට $\lambda_0 = 2$

$\therefore S' \equiv x^2 + y^2 + 4x - 10y - 6 = 0$

$S'' \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ලෙස ගනිමු

$S = 0$ හා $S' = 0$, $S'' = 0$ ට ප්‍රලම්බ වේ නම්

$2.2g + 2.2f = c - 6$ හා

$22g - 25f = c - 6$ වේ.

$\Rightarrow f = 0$

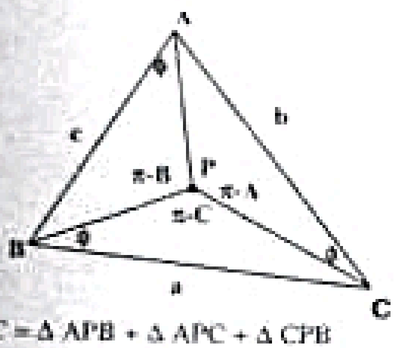
එනම $S' = x^2 + y^2 + 2gx + 4g + 6 = 0$ වෘත්තය $S = 0$ හා $S' = 0$ වෘත්ත ලක්ෂ්‍යයේදී ස්පර්ශ වේ.

$\therefore S = 0$ හා $S' = 0$ වෘත්තවලට ස්පර්ශ වෘත්ත වල පොදු සමීකරණය

$S' = x^2 + y^2 + 2g(x + 2) + 6 = 0$ වේ.

09. (a) සයින් නීතිය :- ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන්

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



$\Delta ABC = \Delta APB + \Delta APC + \Delta CPB$

$$= \frac{1}{2}c.AP\sin\phi + \frac{1}{2}b\,CP\sin\phi + \frac{1}{2}a.BP\sin\phi$$

$$= \frac{abc}{2}\left(\frac{AP}{ab} + \frac{CP}{ac} + \frac{BP}{bc}\right)\sin\phi$$

APB Δ ට සයින් සූත්‍රය යෙදීමෙන්

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{c}{\sin(\pi - B)}$$

$$\therefore PB = \frac{c}{\sin B}\sin\phi$$

එලෙසම $CP = \dfrac{a\sin\phi}{\sin C}$ හා $AP = \dfrac{b\sin\phi}{\sin A}$

$$\therefore ABC\,\Delta = \frac{abc}{2}\left(\frac{\sin\phi}{a\sin A} + \frac{\sin\phi}{c\sin C} + \frac{\sin\phi}{b\sin B}\right)\sin\phi$$

$$= \left(\frac{bc}{2\sin A} + \frac{ab}{2\sin C} + \frac{ac}{2\sin B}\right)\sin^2\phi$$

$$= \left(\frac{\Delta ABC}{\sin^2 A} + \frac{\Delta ABC}{\sin^2 C} + \frac{\Delta ABC}{\sin^2 B}\right)\sin^2\phi$$

$$\Delta ABC = \Delta ABC\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}\right)\sin^2\phi$$

$$\frac{1}{\sin^2\phi} = \underline{\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}}$$

(b) (i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \alpha$ යයි ගනිමු

එවිට $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

$$2\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

එනම් $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

(ii) $$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{5}{6} \times \frac{144}{119}$$

$$= \frac{120}{119}$$

$$4\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)$$

එනම් $2\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)$

(iii) $$\tan(4\alpha - \pi/4) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\pi/4}{1 + \tan 4\alpha\,.\,\tan\pi/4} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

$$4\alpha - \pi/4 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

එනම් $\tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right) - \pi/4 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$

$$4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \pi/4 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

එනම් $\underline{4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) = \pi/4}$

*****