01. (a) $\alpha + \beta = -b \qquad \alpha\beta = c$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$
$$= [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$$
$$= (b^2 - 2c)^2 - 2c^2$$
$$= b^4 - 4b^2c + 4c^2 - 2c^2$$
$$= b^4 - 4b^2c + 2c^2$$

$$\alpha^4\beta^4 = (\alpha\beta)^4 = c^4$$

එවිට $\alpha^4 . \beta^4$ මූලයන් වන සමීකරණය

$$x^2 - (b^4 - 4b^2c + 2c^2)x + c^4 = 0 \quad \text{—— ①}$$

$$\frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1 = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\beta^4} = \frac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{\beta^4}$$

ලෙසම $\dfrac{\beta^4}{\alpha^4} + 1 = \dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{\alpha^4}$

දැන් $\dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{x} = y$ ලෙස ගනිමු

එවිට $\dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{y} = x$

එවිට ① න් $\left(\dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{y}\right)^2 - \dfrac{(b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2}{y} + c^4 = 0$

අවශ්‍ය සමීකරණය

$$\underline{c^4y^2 - (b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2 y + (b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2 = 0}$$

(b) f(x), $(x - \alpha)$ න් බෙදූවිට ලැබෙන $Q(x)$ හා ශේෂය R නම්

$f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$

$\Rightarrow f(\alpha) = 0 \; Q(\alpha) + R = R$

$f(x)$ $(x - \alpha)(x - \beta)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන $\phi(x)$ නම්

$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\phi(x) + Ax + B; \quad \alpha \neq \beta$ විට

$\left.\begin{array}{l} f(\alpha) = A\alpha + B \\ f(\beta) = A\beta + B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{(\beta - \alpha)}$ හා

$B = \dfrac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$

$f(x) = x^3 + kx^2 + k$ ලෙස ගනිමු.

$\alpha = 1, \beta = -2$ හෝ $\alpha = -2, \beta = 1$ වන විට $B = 0$ වේ ගනිමු.

එවිට $0 = \dfrac{-2f(1) - f(-2)}{-3}$

$\Rightarrow -2f(1) - f(-2) = 0$

$\Rightarrow -2f(1) = f(-2)$

$\Rightarrow -2(1 + k + k) = -8 + 4k + k$

$\Rightarrow -4k - 2 = -8 + 5k$

$\Rightarrow 9k = 6$

$\Rightarrow k = \dfrac{2}{3}$

02. (a) ගැහැණු ළමයි 7 අතරින් දෙදෙනෙකු තෝරා ගත හැකි විධි ගණන $= {}^7C_2$

පිරිමි ළමයි 8 අතරින් තිදෙනෙකු තෝරා ගත හැකි විධි ගණන $= {}^8C_3$

අවශ්‍ය තේරීම කළ හැකි විධි ගණන

$$= {}^7C_2 \times {}^8C_3$$
$$= \frac{7!}{2!\,5!} \times \frac{8!}{3!\,5!}$$
$$= \frac{7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{2} \times \cancel{5!}} \times \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{5!}}$$
$$= 21 \times 56$$
$$= \underline{1176}$$

(ii) තේරීමකට උපරිම වශයෙන් පිරිමි ළමයි තිදෙනෙක් පමණක් ඇතුළත් විය හැකි විධි

ගැහැණු ළමයි 5 දෙනෙක්

පිරිමි ළමයි 1 ගැහැණු ළමයි 4

පිරිමි ළමයි 2 ගැහැණු ළමයි 3

පිරිමි ළමයි 3 ගැහැණු ළමයි 2

∴ අවශ්‍ය තේරීම කළ හැකි විධි ගණන

$$= {}^8C_0 . {}^7C_5 + {}^8C_1 . {}^7C_4 + {}^8C_2 . {}^7C_3 + {}^8C_3 . {}^7C_2$$
$$= 1 \times \frac{7!}{2!\,5!} + \frac{8!}{1!\,7!} \times \frac{7!}{3!\,4!} + \frac{8!}{6!\,2!} \times \frac{7!}{3!\,4!} + \frac{8!}{5!\,3!} \times \frac{7!}{5!\,2!}$$
$$= (1 \times 21) + (8 \times 35) + (28 \times 35) + ((56 \times 21)$$
$$= 21 + 280 + 980 + 1176 = \underline{2457}$$

(iii) 15 දෙනා අතරින් කිසියම් 5 දෙනෙක් තේරිය හැකි විධි ගණන $= {}^{15}C_5$

නියමිත පිරිමි ළමයා හා ගැහැණු ළමයා දෙදෙනාම එකම කමිටුවට තේරිය හැකි විධි ගණන $= {}^{13}C_3$

∴ අවශ්‍ය තේරිය හැකි විධි ගණන

$$= {}^{15}C_5 - {}^{13}C_3$$
$$= \frac{15!}{10!\,5!} - \frac{13!}{10!\,3!}$$
$$= \frac{13!}{5!\,10!}(15 \times 14 - 5 \times 4)$$
$$= \frac{13 \times 12 \times 11 \times \cancel{10!}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \cancel{10!}}(210 - 20)$$
$$= \frac{13 \times \cancel{12} \times 11}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3}} \times \cancel{190}^{19}$$
$$= 13 \times 209$$
$$= \underline{2717}$$

(b) $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ අනුයාත සංගුණක තුන ${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$, ${}^nC_{r+2}$ යයි සිතමු.

එවිට ${}^nC_r = 45$, ${}^nC_{r+1} = 120$, ${}^nC_{r+2} = 210$ බව දී ඇත

$$\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}}{\dfrac{n!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}} = \frac{(n-r-1)!\,(r+1)!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{\cancel{(n-r-1)!}\,(r+1)\cancel{r!}}{(n-r)\cancel{(n-r-1)!}\,\cancel{r!}} = \frac{r+1}{n-r}$$

එවිට $\dfrac{r+1}{n-r} = \dfrac{\overset{3}{\cancel{45}}}{\underset{8}{\cancel{120}}}$ හා $\dfrac{r+2}{n-r-1} = \dfrac{\overset{4}{\cancel{120}}}{\underset{7}{\cancel{210}}}$

එනම් $8r + 8 = 3n - 3r$ හා $7r + 14 = 4n - 4r - 4$

$11r - 3n = -8$ —— ① $11r - 4n = -18$ —— ②

① හා ② න් $n = 10$ සහ $r = 2$

එවිට ${}^{10}C_2 = 45$ ${}^{10}C_3 = 120$ ${}^{10}C_4 = 225$

(c) විය නොහැක.

${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$, ${}^nC_{r+2}$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක වේ යයි සිතමු. මෙහි $n > 0$

එවිට $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}}$ එනම් $\dfrac{n-r}{r+1} = \dfrac{n-r-1}{r+2}$

$(n-r)(r+2) = (n-\overline{r+1})(r+1)$

$nr + 2n - r^2 - 2r = nr + n - r^2 - 2r - 1$

$\Rightarrow n = -1$

මෙය විසංවාදයකි

$\therefore$ අනුයාත සංගුණක තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටිය නොහැක.

03. (a) $f(n) = 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ යයි ගනිමු.

$n = 1$ විට $f(1) = 5^2 - 2^2 - 3^2 = 25 - 4 - 9 = 12$

$\therefore f(1)$, 6 න් බෙදේ

$\therefore n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = p \in \mathbb{Z}^+$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට $f(p) = 5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1} = 6k$, $k \in \mathbb{Z}^+$

දැන් $f(p+1) = 5^{p+2} - 2^{p+2} - 3^{p+2}$

$= 5(5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1}) + 3\cdot 2^{p+1} + 2\cdot 3^{p+1}$

$= 5(5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1}) + 6(2^p + 3^p)$

$= 30k + 6(2p + 3p)$

$= 6(5k + 2p + 3p)$

$= 6m$; $m \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore n = p$ විට $f(n)$, 6 න් බෙදේ නම් $n = p + 1$ විට ද $f(n)$, 6 න් බෙදේ.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(n) = 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$, 6 න් බෙදේ.

(b) (i) ද්විපද ප්‍රසාරණයෙන් විට

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \dots {}^nC_rx^r + \dots + {}^nC_nx^n$$

$x = 1$ විට

$$2^n = 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_r + \dots + {}^nC_n$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r = 2^n - 1$$

දැන් ${}^nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2} < \displaystyle\sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$

$$\frac{n(n-1)}{2} < 2^n - 1$$

$$\therefore \frac{n(n-1)}{2} < 2^n$$

$$\therefore \frac{2^n}{n} > \frac{n-1}{2}, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

(ii) $U_r = \dfrac{2^{r-1}r}{(r+1)(r+2)} = 2^{r-1}\dfrac{r}{(r+1)(r+2)}$

$= 2^{r-1}\left(\dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}\right)$ ලෙස ගනිමු

$= 2^{r-1}\left(\dfrac{2}{r+2} - \dfrac{1}{r+1}\right)$

$= \dfrac{2^r}{r+2} - \dfrac{2^{r-1}}{r+1}$

$= \underline{\underline{f(r) - f(r-1)}}$

මෙහි $f(r) = \dfrac{2^r}{r+2}$ වේ

$r = 1$ විට $U_1 = f(1) - f(0)$

$r = 2$ විට $U_2 = f(2) - f(1)$

$r = 3$ විට $U_3 = f(3) - f(2)$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n$ විට $U_n = f(n) - f(n-1)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0) = S_n$$

$$\therefore S_n = \frac{2^n}{n+2} - \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{2^n}{n}\left(\frac{n}{n+2}\right) - \frac{1}{2}$$

නමුත් $\dfrac{2^n}{n} > \left(\dfrac{n-1}{2}\right)$

$$\therefore S_n > \frac{n(n-1)}{2(n+2)} - \frac{1}{2}$$

තවද $n \to \infty$ විට $\dfrac{n(n-1)}{2(n+2)} - \dfrac{1}{2} \to \infty$

එබැවින් $\lim_{n\to\infty} S_n$; $\mathbb{R}$ හි පවතී.

04. $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ හෝ $z^2 + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ හෝ $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$w = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ යයි ගනිමු

එවිට $\omega^2 = \dfrac{1 \mp 2\sqrt{3}\,i - 3}{4} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{3}\,i}{2}$

$\therefore$ එක සංකීර්ණ මූලයක් ω වනවිට ω^2 අනෙක් මූලය වේ.

තවද, $= \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}\right)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)} \times \dfrac{\left(\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

$= \dfrac{\left(\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

ඉහත ලබාගත් ප්‍රතිඵලය අනුව

$\dfrac{1}{1+\omega^2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\omega^3 = 1$ බැවින් $\dfrac{1}{1+\omega^3} = \dfrac{1}{2}$

එලෙස $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1+\omega^r}\right) = \dfrac{1}{2}$, $r = 1, 2, 3$ සඳහා

$\dfrac{1}{1+\omega^r}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\mathrm{Re}\ Z = \dfrac{1}{2}$ රේඛාව මත පිහිටයි.

$(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)$

$= z_1^2 + \omega^3 z_2^2 + \omega^3 z_3^2 + (\omega^2 + \omega)z_1z_2 + (\omega^2 + \omega)z_1z_3 + (\omega^2 + \omega^4)z_2z_3$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 + \omega^2(1 + \omega^2)z_2z_3$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - \omega^3 z_2z_3$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3$

මන්දයත් $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2} - \dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2} = -1$

හා $\omega^4 = \omega$ වන බැවින්

එමෙන් $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3 = 0$

$\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ හෝ

$\underline{\underline{z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3}}$

$z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ ලෙස ගනිමු

එවිට $z_1 - z_2 = -(1+\omega)z_2 - \omega^2 z_3$

$= \omega^2 z_2 - \omega^2 z_3$ $(\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

$= \omega^2(z_2 - z_3)$ —— ①

හා $z_1 - z_3 = -\omega z_2 - (1 + \omega^2)z_3$

$= -\omega z_2 + \omega z_3$ $(\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

$= -\omega(z_2 - z_3)$ —— ②

දැන් $|\omega| = |\omega^2| = 1$ බැවින්

① හා ② න් $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

$\therefore z_1, z_2, z_3$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරයි.

එසේම $z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3$ ලෙස ගත් විට ද

ඉහත පරිදි $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$ බව ලැබේ.

එබැවින් ඉහත ප්‍රකාශය සත්‍යවේ.

එනම් z_1, z_2, z_3 සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරයි.

05. (a)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{(\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(\because \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1\right)$$

$$= \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\tan(\sin^{-1} x) = \sec^2(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; ; 0<x<1 \text{ විට}$$

(b) $U = \ln(\cos x)$ ලෙස ගනිමු. $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

එවිට $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$

දාම නීතිය අනුව

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\tan x \cdot \frac{dy}{du}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 x \frac{dy}{du} - \tan x \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)$$

$$= -\sec^2 x \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - \tan x \cdot \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\sec^2 x \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{-1}{\tan x}\right) - \tan x \cdot \frac{d^2y}{du^2} \cdot (-\tan x)$$

$$\tan x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x \frac{dy}{dx} + \tan^3 x \frac{d^2y}{du^2}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \frac{d^2y}{du^2} = \cos^2 x \sin x \frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx}$$

(c) $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$; $\frac{dy}{dt} = a\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2(t^2+1)}{(t^2-1)}$$

පරාමිතිය t_0 වන ලක්ෂ්‍යයේ දී C ට ඇඳි අභිලම්බයේ

$$\text{අනුක්‍රමණය} = \frac{-(t_0^2-1)}{2(t_0^2+1)}$$

$\therefore$ පරාමිතිය t_0 වන ලක්ෂ්‍යයේ දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය

$$y - a\left(t_0 - \frac{1}{t_0}\right) = \frac{-(t_0^2-1)}{2(t_0^2+1)}\left\{x - \frac{a}{2}\left(t_0 + \frac{1}{t_0}\right)\right\}$$

$$4(t_0^2+1)\,yt_0 - 4a(t_0^2+1)(t_0^2-1)$$

$$= -2t_0(t_0^2-1)x + a(t_0^2-1)(t_0^2+1)$$

$$4(t_0^2+1)t_0 y - 4a(t_0^4-1) = -2(t_0^2-1)t_0 x + a(t_0^4-1)$$

$$2(t_0^2-1)t_0 x + 4(t_0^2+1)t_0 y = 5a(t_0^4-1)$$

මෙම අභිලම්බය $(-13a, 0)$ හරහා යයි නම්

$$-26(t_0^2-1)t_0 a = 5a(t_0^4-1)$$

$$(t_0^2-1)(5t_0^2+26t_0+5) = 0$$

$$(t_0-1)(t_0+1)(5t_0+1)(t_0+5) = 0$$

$$t_0 = \pm 1 \text{ හෝ } t_0 = -\frac{1}{5} \text{ හෝ } t_0 = -5$$

එබැවින් $(-13a, 0)$ සිට C වක්‍රයට අභිලම්බ තුනක් ඇඳිය හැක. ඒවායේ අඩිවල පරාමිතීන් $\pm 1, -5$ හා $-\frac{1}{5}$ වේ.

06. (a)

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{(x-a)^2} + \frac{D}{(x+a)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x+a)^2(x-a) + B(x-a)^2(x+a) + C(x+a)^2 + D(x-a)^2$$

$x = a$ විට $C = \frac{1}{4a^2}$

$x = -a$ විට $D = \frac{1}{4a^2}$

x^3 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

$0 = A + B$ —— ①

නියත සැසඳීමෙන්

$$1 = -a^3A + a^3B + a^2C + a^2D$$

$$\Rightarrow 1 = a^3(B-A) + a^2 \times \frac{1}{4a^2} + a^2 \times \frac{1}{4a^2}$$

$$\Rightarrow a^3(B-A) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B - A = \frac{1}{2a^3} \text{ —— ②}$$

① හා ② න් $B = \frac{1}{4a^3}$ හා $A = -\frac{1}{4a^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a^3(x+a)} - \frac{1}{4a^3(x-a)} + \frac{1}{4a^2(x+a)^2} + \frac{1}{4a^2(x-a)^2}$$

දැන් $$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a^3}\int\frac{dx}{(x+a)} - \frac{1}{4a^3}\int\frac{dx}{(x-a)} + \frac{1}{4a^2}\int\frac{dx}{(x+a)^2} + \frac{1}{4a^2}\int\frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ln|x+a| - \frac{1}{4a^3}\ln|x-a| - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x+a)} - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x-a)} + C$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{2x}{(x-a)(x+a)} + C$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{1}{2a^2(x^2-a^2)} + C$$

(b) (i) $y = 2^x \,(>0) \Rightarrow \ln y = x\ln 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\ln 2}\right) = y$$

එනම් $\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = 2^x$ —— ①

(ii) ① න් $\int 2^t\,dt = \frac{2^t}{\ln 2} + C$ (අභිමත නියතයකි)

(iii) $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}}\,dx = I$ ලෙස ගනිමු

$t = \sqrt{x+1}$ ලෙස ගනිමු

එවිට $dt = \frac{dx}{2t}$ හා $\left\{\begin{array}{l} x=-1 \text{ විට } t=0 \\ x=1 \text{ විට } t=\sqrt{2} \end{array}\right.$

$$\therefore I = \int_0^{\sqrt{2}} 2^t \cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} t \cdot 2^t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} t \; d\left(\frac{2^t}{\ln 2}\right)$$

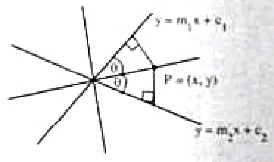
$$= 2\left\{\left[\frac{t\,2^t}{\ln 2}\right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2^t}{\ln 2}\,dt\right\}$$

$$= 2\left[\frac{t\,2^t}{\ln 2}\right]_0^{\sqrt{2}} - 2\left[\frac{2^t}{(\ln 2)^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,2^{\sqrt{2}}}{\ln 2} - \frac{2\,2^{\sqrt{2}}}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^2}$$

$$= 2^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}\right) + \frac{2}{(\ln 2)^2}$$

07.



$y = m_1x + c_1$ හා $y = m_2x + c_2$ $(m_1 \neq m_2)$ යන රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත පිහිටි $P_{(x,y)}$ ලක්ෂ්‍යයක සිට රේඛාවලට ඇති ලම්බදුර සමාන වන බැවින්

$$\frac{y - m_1x - c_1}{\sqrt{1+m_1^2}} = \pm\frac{y - m_2x - c_2}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

එවිට ; $(y - m_1x - c_1)\sqrt{1+m_2^2} = \pm(y - m_2x - c_2)\sqrt{1+m_1^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 \equiv (a_2-a_1)y = (a_2m_1 - a_1m_2)x + (a_2c_1 - a_1c_2) \\ \ell_2 \equiv (a_2+a_1)y = (a_2m_1 + a_1m_2)x + (a_2c_1 + a_1c_2) \end{array}\right\}$$

ලෙස ගනිමු ; මෙහි $a_1 = \sqrt{1+m_1^2}$ හා $a_2 = \sqrt{1+m_2^2}$ වේ.

එවිට ℓ_1 හා ℓ_2 මගින් දී ඇති රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදක දෙක නිරූපණය කරයි.

$m_1 = -m_2$ නම් $a_1 = a_2$ ($\because m_1 \neq m_2$)

එවිට $\ell_1 : x =$ නියතයක් හා

$\ell_2 : y =$ නියතයක් වේ.

$\therefore \ell_1 \perp \ell_2$ වේ

$m_1 \neq -m_2$ විට

$\ell_1 : y = M_1x + k_1$; මෙහි $M_1 = \dfrac{a_2m_1 - a_1m_2}{a_2 - a_1}$

$\ell_2 : y = M_2x + k_2$; මෙහි $M_2 = \dfrac{a_2m_1 + a_1m_2}{a_2 + a_1}$

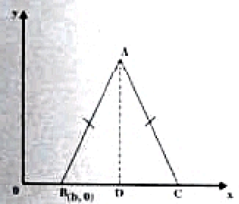
එවිට $M_1M_2 = \dfrac{a_2^2m_1^2 - a_1^2m_2^2}{a_2^2 - a_1^2}$

$= \dfrac{(1+m_2^2)m_1^2 - (1+m_1^2)m_2^2}{1+m_2^2 - (1+m_1^2)}$

$= \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{m_2^2 - m_1^2} = -1$

$\therefore \ell_1 \perp \ell_2$ වේ

(b)



$AD = h$ යැයි ගනිමු

එවිට $6h = 18 \Rightarrow h = 3$

$A = (a, 3)$, $B = (b, 0)$ හා $C = (b+6, 0)$

$\Rightarrow BD = DC = 3 = a - b$

AB හි සමීකරණය $y = \dfrac{3-0}{a-b}(x - b)$

$y = \dfrac{3}{3}(x - b)$

$\underline{\underline{y = x - b}}$

AC හි සමීකරණය

$y - 0 = \dfrac{3-0}{a-(b+6)}[x - (b+6)]$

$y = \dfrac{3}{a-b-6}[x - (b+6)]$

$y = \dfrac{3}{-3}[x - (b+6)]$

$\underline{\underline{y = -x + b + 6}}$

B කෝණයේ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

$\ell_1 : y(1 - \sqrt{2}) = x - b$ හා   (⑧ හි $m_1 = 1, m_2 = 0, c_1 = -b$

$\ell_2 : y(1 + \sqrt{2}) = x - b$ $c_2 = 0$ ගැනීමෙන්)

දැන් $(y(1+\sqrt{2}) - x + b)_{(a,3)} = (3 + 3\sqrt{2} + b - a)$

$= (3 + 3\sqrt{2} - 3) = 3\sqrt{2} > 0$

$[y(1+\sqrt{2}) - x + b]_{(b+6, 0)}$

$= [-(b+6) + b] = -6 < 0$

$\therefore \ell_2$ රේඛාව දෙපස A හා C පිහිටයි

එනම් $\hat{B}$ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය ℓ_2 වේ

$\hat{C}$ හි සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

(⑧ හි $m_1 = -1, m_2 = 0, c_1 = b + 6$ හා $c_2 = 0$ ගැනීමෙන්)

$\ell_3 : y = (\sqrt{2} + 1)x - (\sqrt{2} + 1)(b + 6)$

$\ell_4 : y = -(\sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{2} - 1)(b + 6)$ වේ

දැන් $[y + (\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{2} - 1)(b + 6)]_{(a,3)} = 6 - 3\sqrt{2} > 0$

$[y + (\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{2} - 1)(b + 6)]_{(b,0)} = -6(\sqrt{2} - 1) < 0$

($\because a - b = 3$)

$\therefore$ A හා B ලක්ෂ්‍ය ℓ_4 හි දෙපස වේ.

$\therefore \hat{C}$ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය ℓ_4 වේ.

$AB \perp AC$ හා $AB = AC$ නිසා

$A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \ell_2$ හා $\overrightarrow{OX}$ අතර කෝණය $= \dfrac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \ell_2$ හි අනුක්‍රමණය $= \tan\dfrac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{8} = \underline{\underline{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$

$\hat{A}$ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය AD වන අතර එහි සමීකරණය $x = b + 3$ වේ.

දැන් $\ell_2 \equiv y(1 + \sqrt{2}) = x - b$

$\Rightarrow y = (\sqrt{2} - 1)(x - b)$ — ①

$\ell_4 \equiv y = (\sqrt{2} - 1)(-x + b + 6)$ — ②

① හා ② විසඳීමෙන් ℓ_2 හා ℓ_4 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය

$x = b + 3$, $y = 3(\sqrt{2} - 1)$; b පරාමිතියක් මගින් ලැබේ.

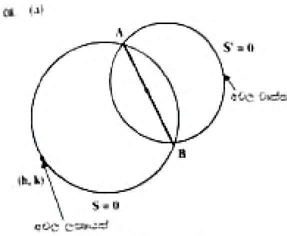
එවිට ℓ_2, ℓ_4 හා AD සංගාමී වේ

එක් සංගාමී වන ලක්ෂ්‍යයකි

$y = 3(\sqrt{2} - 1)$ (නියතයකි) නිසා ABC ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ පථය

$\underline{\underline{y = 3(\sqrt{2} - 1)}}$ වේ

08. (a)



අචල වෘත්තයක්

අචල ලක්ෂ්‍යයක්

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$

AB රේඛාවේ සමීකරණය $S - S' = 0$

එනම් $2(g - g')x + 2(f - f')y + c - c' = 0$

AB, $S' = 0$ හි විෂ්කම්භයක් නිසා එය $(-g', -f')$ හරහා යයි.

එවිට $2(g - g')(-g') + 2(f - f')(-f') + c - c' = 0$ — ①

$S = 0$ වෘත්තය (h, k) හරහා යන නිසා

$h^2 + k^2 + 2gh + 2fk + c = 0$ — ②

① හා ② න්

$-2gg' + 2g'^2 - 2ff' + 2f'^2 - h^2 - k^2 - 2gh - 2fk - c' = 0$

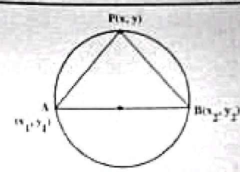
$-2g(g' + h) - 2f(f' + k) + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

$2(g' + h)(-g) + 2(f' + k)(-f) + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

$\therefore S = 0$ හි කේන්ද්‍රය

$2(g' + h)x + 2(f' + k)y + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

සරල රේඛාව මත වේ. g', f', h, k හා c' නියත නිසා මෙම සරල රේඛාව අචල සරල රේඛාවකි.



P(x, y) යනු වෘත්තය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ගනිමු

එවිට $\hat{P} = 90°$ නිසා

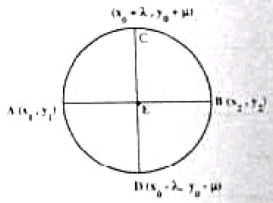
$AP^2 + PB^2 = AB^2$

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$
$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

එනම්

$\underline{\underline{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0}}$



$E = (x_0, y_0)$ ලෙස ගනිමු

E යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නිසා

$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ හා $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$C = (x_0 + \lambda, y_0 + \mu)$ නම් CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E නිසා
$D = (x_0 - \lambda, y_0 - \mu)$ වේ.

$CE^2 = \lambda^2 + \mu^2$ හා $CE = \frac{1}{2}AB$ වේ.

$\Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{4}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]$ — ①

$CE \perp AB$ නිසා

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = -1$$

$$\mu (y_2 - y_1) = -\lambda (x_2 - x_1) \quad —— ②$$

$$① \Rightarrow \lambda^2 + \lambda^2 \frac{(x_2 - x_1)^2}{(y_2 - y_1)^2} = ¼ \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

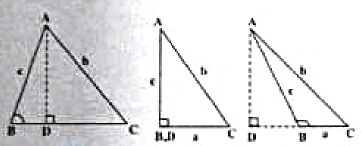
$$\Rightarrow \lambda^2 = ¼ (y_2 - y_1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm ½ (y_2 - y_1)$$

එවිට $\mu = \pm ½ (x_2 - x_1)$

08. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනය ඇසුරින්

$$\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c} \text{ වේ.}$$



i රූපය ii රූපය iii රූපය

I අවස්ථාව ABC සුළුකෝණී විට (i) රූපය

$$AD = AB \sin B = AC \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Sin B}}{AC} = \frac{\text{Sin C}}{AB}$$

එලෙසම $\dfrac{\text{Sin A}}{BC} = \dfrac{\text{Sin C}}{AB}$

$$\therefore \frac{\text{Sin A}}{BC} = \frac{\text{Sin B}}{AC} = \frac{\text{Sin C}}{AB}$$

එනම් $\dfrac{\text{Sin A}}{a} = \dfrac{\text{Sin B}}{b} = \dfrac{\text{Sin C}}{c}$

II අවස්ථාව B සෘජුකෝණී විට (ii) රූපය

$$AD = AB = AC \text{ Sin C}$$

$$AB \text{ Sin } 90^\circ = AC \sin C$$

$$\Rightarrow AB \sin B = AC \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$$

III අවස්ථාව ABC මහාකෝණී විට (iii) රූපය

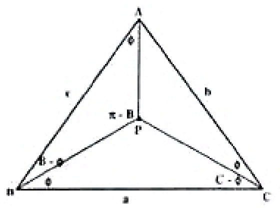
$$AD = AB \sin (\pi - B) = AC \text{ Sin C}$$

$$AB \text{ Sin B} = AC \text{ Sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$$

එමනිසා ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් විට

$$\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$$



ABP Δ න්

$$\frac{BP}{\sin \phi} = \frac{c}{\text{Sin}(\pi - B)} \Rightarrow BP = \frac{c \text{ Sin } \phi}{\text{Sin}(\pi - B)}$$

$$= \frac{c \text{ Sin } \phi}{\text{Sin B}} \quad —— ①$$

BPC Δ න් $CP = \dfrac{a \text{ Sin } \phi}{\text{Sin C}} \quad —— ②$

APC Δ න් $AP = \dfrac{b \text{ Sin } \phi}{\text{Sin A}} \quad —— ③$

$$\frac{\text{Sin}(C - \phi)}{\text{Sin } \phi} = \frac{BP}{CP} = \frac{c \text{ Sin C}}{a \text{ Sin B}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Sin}(C - \phi)}{\text{Sin C Sin } \phi} = \frac{c}{a \text{ Sin B}}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c} (\cot \phi - \cot C) = \frac{b}{\text{Sin B}} \quad —— \text{I}$$

$$\frac{ac}{b} (\cot \phi - \cot B) = \frac{a}{\text{Sin A}} \quad —— \text{II}$$

$$\frac{bc}{a} (\cot \phi - \cot A) = \frac{c}{\text{Sin C}} \quad —— \text{III}$$

Sin නීතියෙන්

$$\frac{ab}{c} (\cot \phi - \cot C) = \frac{ac}{b} (\cot \phi - \cot B) = \frac{bc}{a} (\cot \phi - \cot A)$$

(b)

$$\cos x + \cos y = 1$$

$$\sin x + \sin y = t$$

$$x + y + z = \pi \,;\, x, y, z \geq 0$$

$$\therefore t \geq 0$$

(i) $t = 2 \sin \left(\dfrac{x + y}{2}\right) \cos \left(\dfrac{x - y}{2}\right)$

$$1 = 2 \cos \left(\frac{x + y}{2}\right) \cos \left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow t = \tan \left(\frac{x + y}{2}\right) \quad —— (\text{I})$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(t) = \frac{x + y}{2}$$

(ii) $1 + t^2 = 2 + 2 \cos (x - y) \quad —— (\text{II})$

$$-1 \leq \cos (x - y) \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq t^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{3} \quad (\because t \geq 0)$$

$t^2 = 3$ විට $x - y = 0$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan y = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{3} = z$$

*****