01. (a) α, β යනු $x^2 + bx + c = 0$ හි මූල වැවින්.

$\alpha + \beta = -b \qquad \alpha\beta = c$

එවිට $\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 = \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) = -bc^2$

$\alpha^3\beta^2 . \alpha^2\beta^3 = (\alpha\beta)^5 = c^5$

$\therefore \alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^3$ මූල වූ වර්ගජ සමීකරණය

$x^2 - (\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3)x + \alpha^3\beta^2.\alpha^2\beta^3 = 0$

එනම්, $x^2 + bc^2x + c^5 = 0$ //

$\alpha^3\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^3} = \frac{\alpha^5\beta^5 + 1}{\alpha^2\beta^3} = \frac{c^5+1}{\alpha^2\beta^3}$

එලෙස, $\alpha^2\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3\beta^2} = \frac{c^5+1}{\alpha^3\beta^2}$

දැන් $y = \frac{c^5+1}{x}$ ලෙස ලියූ විට,

ඉහත සමීකරණයෙන්,

$$\left(\frac{c^5+1}{y}\right)^2 + bc^2\left(\frac{c^5+1}{y}\right) + c^5 = 0$$

$(c^5+1)^2 + bc^2(c^5+1)y + c^5y^2 = 0$

$\therefore \alpha^3\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^3}$ හා $\alpha^2\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3\beta^2}$

මූල වූ වර්ගජ සමීකරණය

$c^5x^2 + bc^2(c^5+1)x + (c^5+1)^2 = 0$ වේ.

(b) $f(x)$ බහුපදය $(x - \alpha)$ ගෙන් බෙදූ විට ලබ්ධිය $\varnothing(x)$ හා ශේෂය R නම්,

$f(x) = \phi(x)(x - \alpha) + R$

$x = \alpha$ විට $\underline{f(\alpha) = R}$

α, β, Υ යනු අසමාන තාත්වික සංඛ්‍යා විට,

$f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\Upsilon)$ ගෙන් බෙදූ විට ශේෂය $A(x-\beta)(x-\Upsilon) + B(x-\alpha)(x-\Upsilon) + C(x-\alpha)(x-\beta)$ ලෙස දී ඇත.

එවිට $f(x) = \phi(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\Upsilon) + A(x-\beta)(x-\Upsilon) + B(x-\alpha)(x-\Upsilon) + C(x-\alpha)(x-\beta)$

මෙහි $\phi(x)$ යනු ලබ්ධිය යි.

ඉහත ප්‍රතිඵලය අනුව,

$f(\alpha) = A(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)$

$f(\beta) = B(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)$ හා

$f(\Upsilon) = C(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)$ වේ.

එවිට, $A = \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)}$, $B = \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)}$ හා

$C = \frac{f(\Upsilon)}{(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)}$ වේ.

එවිට ශේෂය,

$$\frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)}(x-\beta)(x-\Upsilon) + \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)}(x-\alpha)(x-\Upsilon) + \frac{f(\Upsilon)}{(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)}(x-\alpha)(x-\beta)$$ වේ.

ශේෂයේහි x හි සංගුණකය,

$$-\left\{\frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)}(\beta+\Upsilon) + \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)}(\alpha+\Upsilon) + \frac{f(\Upsilon)}{(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)}(\alpha+\beta)\right\}$$

$f(x) = x^5 - kx$ හා $\alpha = -1, \beta = 1$ හා $\Upsilon = 2$ ලෙස ගනිමු.

එවිට ශේෂයේ x හි සංගුණකය

$$-\left\{\frac{f(-1)}{(-1-1)(-1-2)}(1+2) + \frac{f(1)}{(1+1)(1-2)}(-1+2) + \frac{f(2)}{(2+1)(2-1)}(1+-1)\right\}$$

$= -\left\{\frac{(-1)^5+k}{2} - \frac{(1)^5-k}{2}\right\}$

$= -k+1$

x පදයක් අඩංගු නොවන විට,

$-k+1=0 \longrightarrow \underline{k=1}$

02. (a)

P	H	O	I	L	S	Y
2	2	2	1	1	1	1

අකුරු 10 ම යොදා ගනිමින් ලබාගත හැකි වෙනස් පිළිවෙල පිරිම් සංඛ්‍යාව,

$= \frac{10!}{2!\,2!\,2!}$

$= 453600$

HISY හැර අකුරු ලෙස ගෙන සැදිය හැකි පිළිවෙල

පිරිම් සංඛ්‍යාව $= \frac{7!}{2!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2}$

$= 1260$

$\therefore$ එම H, I, S, Y අකුරු පිළිවෙල සැදිය හැකි ආකාර ගණන $= 4!$

$= 24$

$\therefore$ H අකුරු ලෙස අනෙක් I, S, Y අකුරු පිහිටන ආකාරය ද ඇතුළත් ව H, I, S, Y අකුරු එකට පිහිටන පිළිවෙල

පිරිම් සංඛ්‍යාව $= \frac{7!}{2!\,2!} \times 4!$

$= 1260 \times 24 = 30240$

H අකුරු ලෙස අනෙක් I, S, Y පිහිටන පිළිවෙල පිරිම් සංඛ්‍යාව

$= \frac{6!}{2!\,2!} \times 3!$

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2}{2 \times 2}$

$= 1080$

$\therefore$ අවශ්‍ය පිළිවෙල පිරිම් සංඛ්‍යාව $= 30240 - 1080$

$= \underline{29160}$

දී ඇති අකුරු 10 න් 3 ක් තේරීම හැකි විකල්ප තුන

(i) සමාන අකුරු යුගල දෙකක් හා වෙනස් අකුරක්

(ii) සමාන අකුරු යුගලයක් හා වෙනස් අකුරු තුනක්

(iii) වෙනස් අකුරු පහක්

(i) විකල්පය අනුව කළ හැකි තේරීම් ගණන

$= {}^3C_2 \times {}^5C_1 = 3 \times 5 = 15$

(ii) විකල්පය අනුව කළ හැකි තේරීම් ගණන

$= {}^3C_1 \times {}^6C_3 = 3 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$

$= 60$

(iii) විකල්පය අනුව කළ හැකි තේරීම්

$= {}^7C_5 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1}$

$= 21$

එලෙස කළ හැකි මුළු තේරීම් ගණන

$= 15 + 60 + 21 = \underline{96}$

(b) $P_n = n(n+1)(n+2) \ldots (n+r-1)$

මෙහි $n, r \in \mathbb{Z}^+$

$P_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3) \ldots (n+r)$

$nP_{n+1} = n(n+1)(n+2) \ldots (n+r)$

$= n(n+1)(n+2) \ldots (n+r-1)(n+r)$

$= n(n+1)(n+2) \ldots (n+r-1)n + n(n+1)(n+2) \ldots (n+r-1)r$

$= nP_n + rP_n$

එබැවින් $P_{n+1} - P_n = r\left[\frac{P_n}{n}\right]$

$\frac{P_n}{n}$, $(r-1)!$ න් බෙදෙන බව දී ඇති බැවින්

$r\left(\frac{P_n}{n}\right)$, $r!$ න් බෙදේ.

එනම් $P_{n+1} - P_n$, $r!$ න් බෙදේ.

$P_{n+1} - P_n = K_n r!$ ලෙස ගනිමු. මෙහි $K_n \in \mathbb{Z}$

$P_1 = 1.2.3.4 \ldots r = r!$

$P_2 - P_1 = K_1 r!$

$P_3 - P_2 = K_2 r!$

$\ldots$

$\ldots$

$\ldots$ +

$P_{n-1} - P_{n-2} = K_{n-2} r!$

$P_n - P_{n-1} = K_{n-1} r!$

$P_n - P_1 = r! \sum_{r=1}^{n-1} K_r$

$P_n = r!\left(\sum_{r=1}^{n-1} K_r + 1\right)$

$\therefore P_n$, $r!$ ගෙන් බෙදේ.

$\therefore$ අනුයාත ධන නිඛිල r හි ගුණිතය $r!$ ගෙන් බෙදේ.//

03. (a) n ධන නිඛිලයක් විට

$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} y^r$

${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ වේ.

සාධනය - $n = 1$ විට

L.H.S $= x + y$

R.H.S $= {}^1C_0 x + {}^1C_1 y = x + y$

${}^1C_0 = {}^1C_1 = 1$ බැවින්

$\therefore n = 1$ විට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.

$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යයි උපකල්පනය කරමු. මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$

එවිට $(x+y)^p = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p-r} y^r$

දෙපසම $(x+y)$ ගෙන් ගුණ කරමු.

$(x+y)^{p+1} = \left\{\sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p-r} y^r\right\}(x+y)$

$= \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p+1-r} y^r + \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p-r} y^{r+1}$

[illegible] $r > 0$ [illegible] R.H.S. හි $x^{p+1-r}y^r$ හි [illegible]

$= {}^pC_r + {}^pC_{r-1}$ වේ.

$${}^pC_r + {}^pC_{r-1} = \frac{p!}{(p-r)!\,r!} + \frac{p!}{(p+1-r)!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{p!}{(p-r)!\,(r-1)!}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{(p+1-r)}\right)$$

$$= \frac{p!}{(p-r)!\,(r-1)!}\left(\frac{p+1-r+r}{r(p+1-r)}\right)$$

$$= \frac{(p+1)!}{(p+1-r)!\,r!} = {}^{p+1}C_r \text{ හා}$$

$${}^pC_0 = {}^pC_p = {}^{p+1}C_0 = {}^{p+1}C_{p+1}$$
$= 1$ නිසා

$$(x+y)^{p+1} = \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r\, x^{p+1-r}y^r$$

∴ $n = p$ විට සත්‍ය නම් $n = p + 1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

[illegible] n [illegible] ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r}y^r \text{ හි } x = p,\ y = q$$

[illegible]

$$(p+q)^n = p^n + \sum_{r=1}^{n-1} {}^nC_r\, p^{n-r}q^r + q^n$$

$$(p+q)^n - p^n - q^n = \sum_{r=1}^{n-1} {}^nC_r\, p^{n-r}q^r$$

$$= pq\sum_{r=1}^{n-1} p^{n-r-1}q^{r-1}$$

n, p, q [illegible] Σ [illegible] $(p+q)^n - p^n - q^n$ [illegible] pq [illegible]

(b) $U_r = \dfrac{2r+1}{(3r-2)(3r+1)} \cdot \dfrac{1}{7^r}$

$$\frac{2r+1}{(3r-2)(3r+1)} = \frac{A}{3r-2} + \frac{B}{3r+1} \text{ ලෙස ගනිමු}$$

එවිට, $2r + 1 = (3r+1)A + (3r-2)B$
$= 3(A+B)r + (A-2B)$

⇒ [illegible]

$A + B = {}^2/_3$ ——— ① හා

$A - 2B = 1$ ——— ②

① හා ② න් $3B = -\frac{1}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$

$A = \frac{7}{9}$

එවිට $U_r = \dfrac{2r+1}{(3r-2)(3r+1)} \cdot \dfrac{1}{7^r}$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{7}{3r-2} - \frac{1}{3r+1}\right)\frac{1}{7^r}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3r-2}\cdot\frac{1}{7^{r-1}} - \frac{1}{3r+1}\cdot\frac{1}{7^r}\right)$$

දැන් $f(r) = \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{(3r+1)}\cdot\dfrac{1}{7^r}$ ලෙස ගත් විට

$U_r = f(r-1) - f(r)$ වේ

$r = 1$ විට $U_1 = f(0) - f(1)$
$r = 2$ විට $U_2 = f(1) - f(2)$
$r = 3$ විට $U_3 = f(2) - f(3)$

$r = n-2$ විට $U_{n-2} = f(n-3) - f(n-2)$
$r = n-1$ විට $U_{n-1} = f(n-2) - f(n-1)$
$r = n$ විට $U_n = f(n-1) - f(n)$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(0) - f(n)$$

$$S_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{9(3n+1)}\cdot\frac{1}{7^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9(3n+1)}\cdot\frac{1}{7^n}\right)$$

$$= \frac{1}{9} \quad \because \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9(3n+1)}\cdot\frac{1}{7^n} = 0$$

04. (a) $-80 - 18i$ හි වර්ගමූලයක් $a + ib$ යයි ගනිමු. මෙහි a හා b තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.

එවිට,

$$(a+ib)^2 = -80 - 18i$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + i\,2ab = -80 - 18i$$

තාත්වික හා අතාත්වික කොටස් [illegible]

$a^2 - b^2 = -80$ ——— ①

$2ab = -18$ ——— ②

② න් $b = -\frac{9}{a}$ එවිට ① න් $a^2 - \frac{81}{a^2} = -80$

$a^4 + 80a^2 - 81 = 0$

$(a^2 + 81)(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a^2 = -81$ හෝ $a^2 = 1$

a තාත්වික නිසා $a^2 \neq -81 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

එවිට $b = -9$ හෝ 9

∴ $-80 - 18i$ හි වර්ගමූල $1 - 9i$ හා $-1 + 9i$ වේ.

$4z^2 + (16i - 4)z + (65 + 10i) = 0$ හි විවේචකය

$$(16i-4)^2 - 16(65+10i) = (-256 - 128i + 16) - (1040 + 160i)$$
$$= -1280 - 288i$$
$$= 16(-80 - 18i)$$
$$= \{4(1-9i)\}^2$$

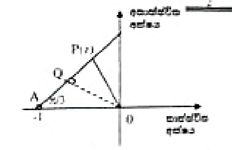
$(-80 - 18i = (1-9i)^2$ නිසා$)$

දී ඇති වර්ගජ සමීකරණයේ මූල $\dfrac{-(16i-4) \pm 4(1-9i)}{8}$

$$= \frac{8-52i}{8} \text{ හා } \frac{20i}{8}$$

$$= 1 - \frac{13i}{2} \text{ හා } \frac{5i}{2}$$

(b)



$\arg(z+1) = \frac{\pi}{3}$ [illegible] A [illegible] $\frac{\pi}{3}$ [illegible] P [illegible] OP [illegible]

(i) [illegible] OP [illegible]

(ii) [illegible] $= OQ$
$= 1\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

$z^3 - 1 = 0$ විට $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

[illegible] $z^2 + z + 1 = 0$ [illegible]

∴ $z^3 - 1 = 0$ හි සංකීර්ණ මූල $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ වේ

දැන් $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ යයි ගනිමු

එවිට, $\omega^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$$= \frac{1 - 3 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

[illegible] $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1 - 3 + 2\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

∴ [illegible] ω [illegible] ω^2 [illegible]

$z^3 - 1 = 0$ හි මූල $1, \omega, \omega^2$ නිසා

$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \Rightarrow \omega + 1 = -\omega^2$

එවිට k [illegible]

$(\omega+1)^k = (-\omega^2)^k$ [illegible]

k [illegible] $(-1)^k = -1$ නිසා

$(\omega+1)^k = -\omega^{2k}$ වේ

[illegible] $(\omega+1)^k + \omega^{2k} = 0$

$f(x) = (x+1)^k + x^{2k}$ යයි ගනිමු. මෙහි k [illegible]

එවිට, $f(\omega) = (\omega+1)^k + \omega^{2k} = 0$

$f(\omega^2) = (\omega^2+1)^k + \omega^{4k}$
$= (-\omega)^k + \omega^{4k}$
$= (\omega^3)^k\,\omega^k - \omega^k$
$= \omega^k(\omega^{3k} - 1)$, $\omega^3 = 1$ නිසා
$= 0$

∴ $(x - \omega)$ හා $(x - \omega^2)$, $f(x)$ හි සාධක වේ.

[illegible] $(x-\omega)(x-\omega^2) = x^2 - (\omega+\omega^2)x + \omega^3$
$= x^2 + x + 1$

ද $f(x)$ හි සාධකයක් වේ.

[illegible] $x^2 + x + 1$, $(x+1)^k + x^{2k}$ හි [illegible] k [illegible]//

05. (a)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= 1\cdot\cos x \quad \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1\right)$$

$= \underline{\cos x}$

$g(x) = \cos x$

$= \sin(\frac{\pi}{2} - x) \quad = f(\frac{\pi}{2} - x)$

$= f(y)$ මෙහි $y = \frac{\pi}{2} - x$

දැන් $\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} f(y) = \frac{d f(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$= \cos y \cdot (-1)$

$= \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$= \underline{\sin x}$

(i) $\frac{d}{dx} \sin(\ln(1 + x^2)) = \cos(\ln(1 + x^2)) \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x$

$= \frac{2x}{1 + x^2} \cos(\ln(1 + x^2))$

(ii) $\frac{d}{dx} \cos(\sin x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$

$= -\cos x \sin(\sin x)$

(b) (i) $y = \sin k\theta \operatorname{cosec} \theta$ සහ $x = \cos\theta$, k නියතයකි

$\frac{dy}{d\theta} = k \cos k\theta \operatorname{cosec}\theta - \sin k\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta \cot\theta$

සහ $\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$

$= -(k\cos k\theta \operatorname{cosec}\theta - \sin k\theta \operatorname{cosec}\theta \cot\theta) \cdot \frac{1}{\sin\theta}$

$= -k\cos k\theta \operatorname{cosec}^2\theta + \sin k\theta \operatorname{cosec}^2\theta \cot\theta$

$\sin^2\theta \frac{dy}{dx} = -k\cos k\theta + \sin k\theta \cot\theta$

$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = -k\cos k\theta + xy$

$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy + k\cos k\theta = 0$

(ii) [illegible] x විෂයෙහි අවකලනයෙන්,

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - y - x\frac{dy}{dx} + k\frac{d}{d\theta}\cos k\theta \frac{d\theta}{dx} = 0$

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y - k^2 \sin k\theta \left(\frac{-1}{\sin\theta}\right) = 0$

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y + k^2 \sin k\theta \operatorname{cosec}\theta = 0$

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (k^2 - 1)y = 0$

(c) $y(1 + x^2) = 2 \longrightarrow$ ①, x විෂයෙහි අවකලනයෙන්

$\frac{dy}{dx}(1 + x^2) + 2xy = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{1 + x^2}$ = [illegible]

$P(3, \frac{1}{5})$ [illegible]

$= \frac{-2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}}{1 + 9}$

$= \frac{-3}{25}$

∴ P හි [illegible]

$y - \frac{1}{5} = \frac{-3}{25}(x - 3)$

$25y - 5 = -3x + 9$

$\Rightarrow 3x + 25y = 14 \longrightarrow$ ②

[illegible]

① හා ② න්

$\frac{2}{1 + x^2} = \frac{14 - 3x}{25}$

$50 = 14 + 14x^2 - 3x - 3x^3$

$\Rightarrow 3x^3 - 14x^2 + 3x + 36 = 0$

[illegible] P හි [illegible] $x = 3$ [illegible] $(x - 3)^2$ [illegible]

$\therefore 3x^3 - 14x^2 + 3x + 36 = (x - 3)^2(3x + 4)$

$\therefore x = 3$ [illegible] $x = -\frac{4}{3}$ [illegible]

∴ P හි [illegible] Q [illegible],

$Q = (\frac{-4}{3}, \frac{18}{25})$ වේ.

06. (a) $I_k = \int \frac{e^t}{t^k} dt = \int \frac{(-1)}{k - 1} e^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^{k-1}}\right) dt$

$= -\frac{1}{k - 1}\frac{e^t}{t^{k-1}} + \frac{1}{k - 1}\int \frac{e^t}{t^{k-1}} dt$

$(k - 1)I_k - I_{k-1} + \frac{e^t}{t^{k-1}} = C \longrightarrow$ ①

C අභිමත නියතයකි.

$I = \int e^x \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2 dx$

$t = 1 + x$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $I = \int \frac{e^{t-1}(2 - t)^2 dt}{t^2} = \frac{1}{e}\int e^t\left\{\frac{4}{t^2} - \frac{4}{t} + 1\right\} dt$

$I_k = \int \frac{e^t}{t^k} dt$ නිසා,

$I = \frac{1}{e}\{4I_2 - 4I_1 + \int e^t dt\}$

① න් $I_2 - I_1 = \frac{-e^t}{t} + C$

$\therefore I = \frac{1}{e}\left(\frac{-4e^t}{t} + 4C + e^t + D\right)$

මෙහි D අභිමත නියතයකි

$= \frac{e^{1+x}}{e} - \frac{4}{e}\frac{e^{1+x}}{(1 + x)} +$ නියතයක්

(b) $J = \int_0^a f(x)\,dx$, $a > 0$ යයි ගනිමු.

$y = a - x$ නම් එවිට $dy = -dx$

එවිට $J = \int_a^0 f(a - y)(-dy)$

$= \int_0^a f(a - y)\,dy$

[illegible]

$J = \int_0^a f(a - x)\,dx$

[illegible]

$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}(\frac{\pi}{2} - x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\,dx$

k [illegible]

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\,dx$

$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\,dx = \int_0^{\pi/2} dx$

$I = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} = \underline{\frac{\pi}{4}}$

07. $ax + by + c = 0$ [illegible] $bx - ay + c' = 0$ [illegible]

[illegible] (x_0, y_0) [illegible]

$bx_0 - ay_0 + c' = 0$

$\therefore (x_0, y_0)$ [illegible] $ax + by + c = 0$ [illegible]

$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$ වේ.

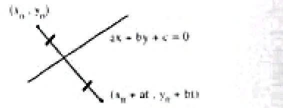
[illegible] $b(x - x_0) = a(y - y_0)$

$\Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = t$ (යයි ගනිමු)

එවිට, $x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt$

$\therefore (x_0, y_0)$ [illegible] $ax + by + c = 0$ [illegible] t [illegible]

$(x_0 + at, y_0 + bt)$ [illegible]



$ax + by + c = 0$ [illegible] (x_0, y_0) හි [illegible] $(x_0 + at, y_0 + bt)$ නම්.

[illegible] $(x_0 + \frac{at}{2}, y_0 + \frac{bt}{2})$

$ax + by + c = 0$ මත වේ.

එවිට $a(x_0 + \frac{at}{2}) + b(y_0 + \frac{bt}{2}) + c = 0$

[illegible] $t = -2\frac{(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$ [illegible]

$\therefore ax + by + c = 0$ [illegible] (x_0, y_0) හි [illegible]

$(x_0 + at, y_0 + bt)$ වේ. මෙහි $t = \frac{-2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$ වේ.

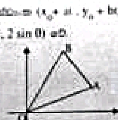
OA [illegible]

$x\cos\theta + y\sin\theta - 1 = 0$ [illegible] A [illegible]

$x\cos\theta + y\sin\theta - 1 = 0$ [illegible] O හි [illegible]

∴ A හි [illegible] $(x_0 + at, y_0 + bt)$ [illegible]

$(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ වේ.



∴ OA රේඛාවේ සමීකරණය $\frac{y}{x} = m$ මගින්

$$\frac{y}{x} = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta}$$

$y = x\tan\theta$ වේ.//

AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය

$x - y - 1 = 0$ හැඩින් B යනු $x - y - 1 = 0$ තුළින් A හි ප්‍රතිබිම්බය වේ.

∴ B හි ඛණ්ඩාංක $\left\{2\cos\theta - 2\frac{(2\cos\theta - 2\sin\theta - 1)}{2},\ 2\sin\theta + 2\frac{(2\cos\theta - 2\sin\theta - 1)}{2}\right\}$

$= (1 + 2\sin\theta,\ -1 + 2\cos\theta)$ වේ.

∴ OB රේඛා සමීකරණය $\frac{y}{x} = m$ මගින්

$$\frac{y}{x} = \frac{-1 + 2\cos\theta}{1 + 2\sin\theta}$$

$y(1 + 2\sin\theta) = x(-1 + 2\cos\theta)$

එනම් $x(1 - 2\cos\theta) + y(1 + 2\sin\theta) = 0$

AB හි සමීකරණය

$$\frac{y - 2\sin\theta}{x - 2\cos\theta} = \frac{-1 + 2\cos\theta - 2\sin\theta}{1 + 2\sin\theta - 2\cos\theta}$$

OB හි ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය

$$y - (\cos\theta - \frac{1}{2}) = \frac{-(1 + 2\sin\theta)}{(-1 + 2\cos\theta)}\{x - (\sin\theta + \frac{1}{2})\}$$

$y(2\cos\theta - 1) + x(1 + 2\sin\theta) - \frac{1}{2}(2\cos\theta - 1)^2 - \frac{1}{2}(2\sin\theta + 1)^2 = 0$

$y(2\cos\theta - 1) + x(1 + 2\sin\theta) - \frac{1}{2}[4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 + 4\sin^2\theta + 4\sin\theta + 1] = 0$

$y(2\cos\theta - 1) + x(1 + 2\sin\theta) - \frac{1}{2}(6 - 4\cos\theta + 4\sin\theta) = 0$

$y(2\cos\theta - 1) + x(2\sin\theta + 1) - (3 - 2\cos\theta + 2\sin\theta) = 0$ ——— ①

OA හා AB රේඛාවල ලම්බ සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වල ඛණ්ඩාංක $x\cos\theta + y\sin\theta - 1 = 0$ හා $x - y - 1 = 0$ සමීකරණ දෙක මගින් ලැබේ.

ඒවා විසඳීමෙන්,

$$x = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \text{ හා } y = \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

∴ OA හා AB හි ලම්බ සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය

$$\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta},\ \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right)$$

①හි $\frac{(1 - \cos\theta)}{\cos\theta + \sin\theta}(2\cos\theta - 1) + \frac{(1 + \sin\theta)}{(\cos\theta + \sin\theta)}(2\sin\theta + 1)$

$$= \frac{3\cos\theta - 1 - 2\cos^2\theta + 3\sin\theta + 2\sin^2\theta + 1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$= \frac{3(\cos\theta + \sin\theta) + 2(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\cos\theta + \sin\theta}$$

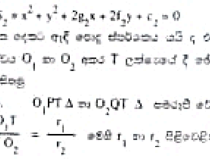
$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)(3 + 2\sin\theta - 2\cos\theta)}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$= (3 + 2\sin\theta - 2\cos\theta)$

∴ $\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta},\ \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right)$ ලක්ෂ්‍යය OB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය මත ① තෘප්ත කරයි.

එනම් OA, AB හා OB හි ලම්බ සමච්ඡේදක එක ලක්ෂ්‍යයක් වේ.

08.



PQ යනු $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

වෘත්ත දෙකට ඇඳි පොදු ස්පර්ශකය යයි ද එය O_1O_2 රේඛා ඛණ්ඩය O_1 හා O_2 අතර T ලක්ෂ්‍යයේ දී ඡේදනය කරන්නේ යයි සිතමු.

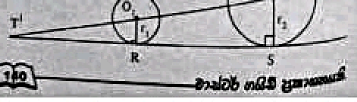
එවිට, $O_1PT\ \Delta$ හා $O_2QT\ \Delta$ සමරූපී වේ

∴ $\frac{O_1T}{TO_2} = \frac{r_1}{r_2}$ මෙහි r_1 හා r_2 පිළිවෙළින් $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ හි අරයන් වේ.

T යනු O_1O_2 රේඛා ඛණ්ඩය $r_1 : r_2$ අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව බෙදන ලක්ෂ්‍යය බැවින්,

$$T = \left(\frac{-g_1r_2 - g_2r_1}{r_1 + r_2},\ \frac{-f_1r_2 - f_2r_1}{r_1 + r_2}\right)$$

මෙලෙස T හරහා තිර්යක් පොදු ස්පර්ශකයක් වෘත්ත දෙකට පැහැදිලි ම ඇඳිය හැකි ය.



$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ ඇඳි පොදු ස්පර්ශකයක් RS යයි ද එයට O_1O_2 රේඛාව දික් කළ විට T^1 හි දී හමුවන්නේ යයි ගනිමු.

එවිට T^1RO_1 හා T^1SO_2 සමරූපී බැවින්,

$$\frac{O_1T^1}{O_2T^1} = \frac{r_1}{r_2}$$

එනම්, T^1 යනු O_1O_2 රේඛාව බාහිර ව $r_1 : r_2$ අනුපාතයට බෙදන ලක්ෂ්‍යය යි.

$$T^1 = \left(\frac{g_1r_2 - g_2r_1}{r_1 - r_2},\ \frac{f_1r_2 - f_2r_1}{r_1 - r_2}\right)$$

පැහැදිලිව ම T^1 සිට සරල පොදු ස්පර්ශකයක් වෘත්ත දෙකට ඇඳිය හැකි ය.

$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 86 = 0$ හා $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 74 = 0$ වෘත්ත දෙකේ සමීකරණ

$(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$ හා $(x + 9)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

ආකාරයට ලිවිය හැක.

එනම් T හා T^1 හි ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින්

$$\left(\frac{9 \times 4 - 9 \times 2}{2 + 4},\ \frac{-3 \times 4 + 3 \times 2}{2 + 4}\right) = (3, -1) \text{ හා}$$

$$\left(\frac{-2 \times 9 + 4 \times (-9)}{2 - 4},\ \frac{-2 \times (-3) + 4 \times 3}{2 - 4}\right) = (27, -9)$$

වේ.

T හරහා ඇඳි රේඛාවක සමීකරණය $y + 1 = m(x - 3)$ ආකාර වේ.

එනම්, $y - mx + 3m + 1 = 0$ වේ.

මෙම රේඛාව $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$ ස්පර්ශ කරයි නම්,

$$\frac{|-3 - 9m + 3m + 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = 2$$

එනම්, $(-6m - 2)^2 = 4(1 + m^2)$

$4(3m + 1)^2 = 4(1 + m^2)$

$8m^2 + 6m = 0$

$4m^2 + 3m = 0$

$m = 0$ හෝ $m = \frac{-3}{4}$

මෙලෙස T හරහා යන පොදු ස්පර්ශක වල සමීකරණ

$y + 1 = 0$ හා $y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 3)$

එනම් $y + 1 = 0$ හා $4y + 3x - 5 = 0$

T^1 හරහා යන රේඛාවක සමීකරණය

$y + 9 = m'(x - 27)$ ආකාර වේ.

එනම්, $y - m'x + 27m' + 9 = 0$

මෙම රේඛාව $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන විට

$$\frac{|-3 - 9m' + 27m' + 9|}{\sqrt{1 + m'^2}} = 2$$

$(6 + 18m')^2 = 4(1 + m'^2)$

$36(1 + 3m')^2 = 4(1 + m'^2)$

$9(1 + 6m' + 9m'^2) = 1 + m'^2$

$9 + 54m' + 81m'^2 = 1 + m'^2$

$80m'^2 + 54m' + 8 = 0$

$40m'^2 + 27m' + 4 = 0$

$$m' = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 640}}{80}$$

$$= \frac{-27 \pm \sqrt{729 - 640}}{80}$$

$$= \frac{-27 \pm \sqrt{89}}{80}$$

මෙසේ T^1 හරහා වෘත්ත දෙකට ඇඳි පොදු ස්පර්ශක වල සමීකරණ

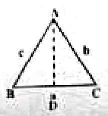
$$y + 9 = \frac{-27 + \sqrt{89}}{80}(x - 27) \text{ හා}$$

$$y + 9 = \frac{-27 - \sqrt{89}}{80}(x - 27) \text{ වේ.}$$

09. ABC ත්‍රිකෝණයක සම්මත අංකනයෙන්

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ වේ.}$$

සාධනය :-

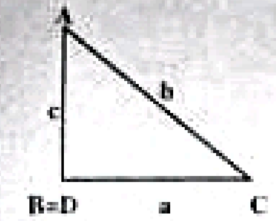


(i) ABC සුළුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් විට

AD = AB sin B
= AC sin C

∴ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

(ii)



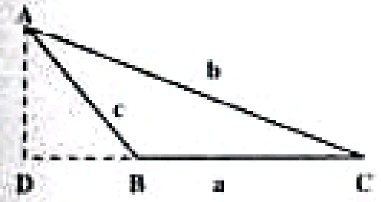
ABC සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් විට

$AD = AB = AC \sin C$

$AB \sin B = AC \sin C \; (\because B = 90^0)$

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

(iii)



ABC මහාකෝණී ත්‍රිකෝණයක් විට

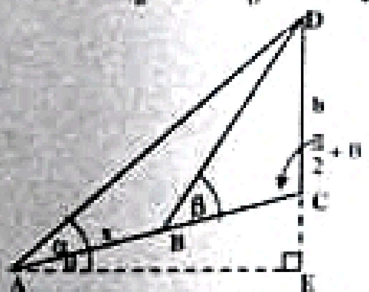
$AD = AB \sin (\pi - B)$

$= AC \sin C$

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

එමෙන්ම, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

$\therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ //



ACD ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය යෙදීමෙන්

$\frac{AD}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{h}{\sin \alpha}$

$\Rightarrow h = \frac{AD \sin \alpha}{\cos \theta}$

ABD ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය යෙදීමෙන්

$\frac{AD}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{x}{\sin(\beta - \alpha)} \Rightarrow AD = \frac{x \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

$\therefore h = \frac{x \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha) \cos \theta}$

(ii) $d = DE = AD \sin(\alpha + \theta)$ හා

$AD = \frac{x \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$ නිසා

$d = \frac{x \sin \beta \sin(\alpha + \theta)}{\sin(\beta - \alpha)}$

(b) (i) $\sin \theta - \cos \theta = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4}$

මෙහි සාධාරණ විසඳුම,

$\theta - \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, \; n \in \mathbb{Z}$

$\theta = n\pi + (1 + (-1)^n) \frac{\pi}{4}$

$n = 0$ විට $\theta = \frac{\pi}{2}$ හා $n = 1$ විට $\theta = \pi$

(ii) $\tan^{-1} \frac{1}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{3} = \sin x$

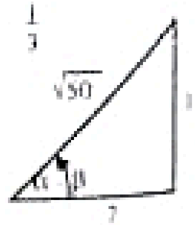
$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2}$, $\beta = \tan^{-1} \frac{1}{3}$ [illegible]

$\tan \alpha = \frac{1}{2}$ හා $\tan \beta = \frac{1}{3}$ [illegible]

එවිට, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{7}$



$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{50}}$

එවිට $\alpha - \beta = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{50}}$

නමුත් $\alpha - \beta = \sin^{-1} x$

$\sin^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{50}}$

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

❖❖❖❖