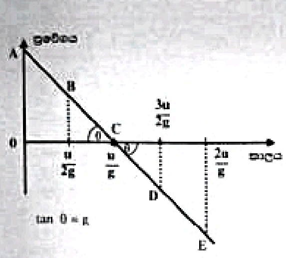
01. (a)



$P_1, P_2$ හා $P_3$ අංශු **සිරස්** ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරන බැවින් ඒවායේ ආරම්භක **සිරස්** ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙළින් P අංශුවේ $\frac{u}{2g}$, $\frac{u}{g}$ හා $\frac{3u}{2g}$ කාල වලදී **සිරස්** ප්‍රවේගයන් වේ. එබැවින් P අංශුවේ ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරය AE රේඛාවෙන් නිරූපනය වෙයි නම්, $P_1, P_2$ හා $P_3$ අංශුවල ප්‍රවේගයන්ගේ සිරස් සංරචක සඳහා වන ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර කොටස් පිළිවෙළින් BE, CE හා DE කොටස් මගින් නිරූපනය වේ.

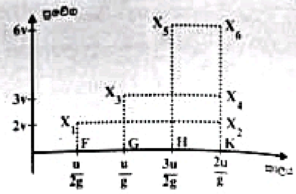
ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරයට අනුව $t = \frac{2u}{g}$ කාලයේ දී P අංශුව පොළොවට ළඟා වෙයි.

$t = \frac{u}{2g}$ කාලයේදී ප්‍රක්ෂේප කෙරෙන $P_1$ අංශුව ද $\frac{3u}{2g}$ කාලයක් චලනය වීමෙන් පසු $t = \frac{2u}{g}$ මොහොතේ දී පොළොවට ළඟා වේ.

$t = \frac{u}{g}$ කාලයේ දී ප්‍රක්ෂේප කෙරෙන $P_2$ අංශුව ද $\frac{u}{g}$ කාලයකට පසු $t = \frac{2u}{g}$ මොහොතේ දී පොළොවට ළඟා වේ.

$t = \frac{3u}{2g}$ කාලයේ දී ප්‍රක්ෂේප කෙරෙන $P_3$ අංශුව $\frac{u}{2g}$ කාලයකට පසු $t = \frac{2u}{g}$ මොහොතේ දී පොළොවට ළඟා වේ.

එනම් අංශු තුනම $t = \frac{2u}{g}$ කාලයේ දී, (එකම මොහොතේ) පොළොවට ළඟා වේ.



ඉහත ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරයට අනුව $P_1$, $P_2$ හා $P_3$ අංශුවල ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර $X_1X_2$, $X_3X_4$ හා $X_5X_6$ මගින් නිරූපනය වේ.

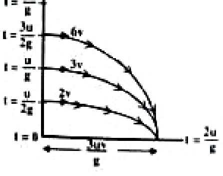
එක් එක් අංශුවේ තිරස් විස්ථාපනයන් සොයමු.

$P_1$ හි විස්ථාපනය = $X_1X_2KF \square = 2v \times (\frac{2u}{g} - \frac{u}{2g}) = \frac{3uv}{g}$

$P_2$ හි විස්ථාපනය = $X_3X_4KG \square = 3v \times (\frac{2u}{g} - \frac{u}{g}) = \frac{3uv}{g}$

$P_3$ හි විස්ථාපනය = $X_5X_6KH \square = 6v \times (\frac{2u}{g} - \frac{3u}{2g}) = \frac{3uv}{g}$

එබැවින් අංශුන් තුනම එකම ලක්ෂයක දී, එකම කාලයේ දී පොළොවට ළඟා වේ. ( ∵ අංශු තුනේම තිරස් විස්ථාපනයන් සමාන බැවිනි) පෙන පරිගත චලිත පථයන් දක්වයි.



(b) (බ ජ) = u

(ජ E) = v

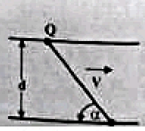
(බ E) = (බ ජ) + (ජ E)

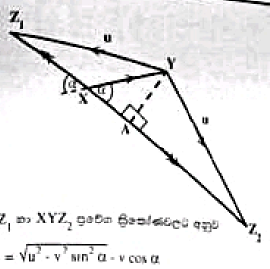
$= u + \rightarrow v$

$= \rightarrow v + u$

$= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ_i}$

$= \overrightarrow{XZ_i}\ (i = 1, 2)$





$XYZ_1$ හා $XYZ_2$ ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවලට අනුව

$XZ_1 = \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha} - v \cos \alpha$

$\overrightarrow{XZ_2} = \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha} + v \cos \alpha$

දෙගමනට ගතවන කාලය T නම්

$$T = \frac{PQ}{|\overrightarrow{XZ_1}|} + \frac{PQ}{|\overrightarrow{XZ_2}|}$$

$$= PQ\left(\frac{1}{XZ_1} + \frac{1}{XZ_2}\right)$$

$$= PQ\left[\frac{1}{(AZ_1 - AX)} + \frac{1}{(AZ_2 + AX)}\right]$$

$$= PQ\left[\frac{AZ_1 + \cancel{AX} + AZ_1 - \cancel{AX}}{AZ_1^2 - AX^2}\right]$$

$$= \frac{PQ \times 2\,AZ_1}{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha - v^2 \cos^2 \alpha} \quad (\because AZ_1 = AZ_2 \text{ වේ.})$$

$$= \frac{2PQ\,(u^2 - v^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}{u^2 - v^2}$$

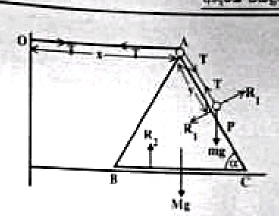
$$= \frac{2\,d\,\text{cosec}\,\alpha\,(u^2 - v^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}{u^2 - v^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2d\,(u\,\text{cosec}^2\alpha - v^2)^{1/2}}{u^2 - v^2}}}$$

(i) Q ලක්ෂය P ලක්ෂයේ සිට ගඟ පහළ දිශාවට නම් α වෙනුවට ඉහත ප්‍රතිඵලයේ π - α ආදේශ කළද T වෙනසක් නොවේ.

(ii) T අවම වන්නේ $\text{cosec}^2\,\alpha$ අවම වන විටය. අවම $\text{cosec}^2\,\alpha = 1$ බැවින් හා එසේ වන්නේ $\alpha = \pi/2$ විට බැවින් T අවම වීම සඳහා PQ රේඛාව ගං ඉවුරට ලම්බ විය යුතුයි.

02.



ආනතයට සාපේක්ෂව අංශුව මගින් කරන දුර, පොළොවට සාපේක්ෂව ආනතය මගින් කරන දුරට සමාන වේ. තන්තුවේ දිග $l$ බැවින් t = t විට OA = x හා AP = y නම් x + y = $l$ වේ. t විෂයෙන් දෙවරක් අවකලනයෙන් $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$ බව ලැබේ.

(ආ E) = $\underline{F}$ නම් $|F| = \ddot{x} \Rightarrow F = -\ddot{x}$

(අං ආ) = $\searrow f$ නම් $|f| = \ddot{y}$ වේ $f = \ddot{y}$

$-F + f = 0 \Rightarrow F = f$

(අං E) = (අං ආ) + (ආ E)

$= \searrow f + \underline{F}$

$= \searrow f = \overset{\downarrow f \sin\alpha}{\leftarrow F - f\cos\alpha}$

E = mg යොදමු.

P ට ↘ $-T + mg \sin\alpha = m(f - F\cos\alpha)$ —— ①

පද්ධතියට ← $T = MF + m(F - f\cos\alpha)$ —— ②

$F = f$ ආදේශයෙන්

① න් $-T + mg\sin\alpha = mF(1 - \cos\alpha)$ —— ③

② න් $T = MF + mF(1 - \cos\alpha)$ —— ④

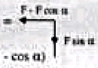
③ + ④ න් $mg\sin\alpha = F[M + 2m(1 - \cos\alpha)]$ මගින් F ලබාගත හැක.

B සිට පිහිටීමට ඇති දුර d නම්, ආනතයේ චලිතය සඳහා $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ← යෙදීමෙන්

$$d = 0 + \frac{1}{2}Ft_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{F}}$$

F සඳහා ආදේශයෙන් $t_1 = \sqrt{\frac{2d[M + 2m(1 - \cos\alpha)]}{mg\sin\alpha}}$ ලැබේ.

අංශුවට v = u + at යෙදීමෙන් (අ. B) =



$\leftarrow v_1 = 0 + (F - F\cos\alpha)t_1 = Ft_1(1-\cos\alpha)$

$\downarrow v_2 = 0 + F\sin\alpha\, t_1 \qquad = Ft_1\sin\alpha$

$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad = Ft_1\{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\}^{½}$

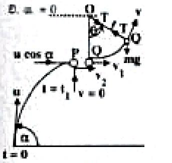
$= Ft_1\{2(1-\cos\alpha)\}^{½}$

$t_1$ හා F සඳහා ආදේශයෙන්

$$V = \left\{\frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}\right\}\sqrt{\frac{2d\{M + 2m(1-\cos\alpha)\}}{mg\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{2d\, mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}}$$

03.



A → B චලිතය සඳහා P අංශුවට,

$\uparrow v = u + at$ යෙදීමෙන් $0 = u\sin\alpha - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{u\sin\alpha}{g}$

$\rightarrow S = ut + \frac{1}{2}ft^2$ යෙදීමෙන් $a = u\cos\alpha\, t_1 \Rightarrow$

$a = u\cos\alpha \times \frac{u\sin\alpha}{g}$

$\Rightarrow a = u^2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$

P හා Q සරලව ගැටෙන බැවින් (P තිරස් ලෙස චලනය වන බැවින් ) ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්. ගැටුමින් පසු Q හා P හි වේග $v_1$ හා $v_2$ නම්

$\cancel{m}u\cos\alpha = \cancel{m}v_1 + \cancel{m}v_2$ — ① (P හි තිරස් ප්‍රවේග සංරචකය ගැටෙන මොහොතේ u cos α වේ.)

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය යෙදීමෙන්

$e\,u\cos\alpha = v_1 - v_2$ — ②

① + ② $v_1 = \frac{u}{2}\cos\alpha(1+e)$ ① - ② $v_2 = \frac{u}{2}\cos\alpha(1-e)$

O ලක්ෂ්‍යය අවල යයි සලකමු. එවිට Q අංශුව කේන්ද්‍රය O වූ ද, අරය ℓ වූ ද වෘත්තයක චලිතය අරඹයි.

QO දිශාවට F = mg යෙදීමෙන්, QO යටි අත් සිරසට θ කෝණයක් ආනතව ඇති විට

$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell}$ — ③

O හරහා තිරස් තලය ශක්ති විභව ශුන්‍ය ලෙස ගෙන ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 - \cancel{m}g\ell = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \cancel{m}g\ell\cos\theta$ — ④

$\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{4}\cos^2\alpha(1+e)^2 - g\ell = \frac{1}{2}v^2 - g\ell\cos\theta$

$v^2 = \frac{1}{4}u^2\cos^2\alpha(1+e)^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)$ බව ලැබේ.

එම අගය ③ හි ආදේශ කිරීමෙන්

$T = mg\cos\theta + \frac{m}{\ell}\{\frac{1}{4}u^2\cos^2\alpha(1+e)^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)\}$

Q අංශුව පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙන යාමට නම් සියලු θ සඳහා T ≥ O විය යුතුය.

එනම් අවම T ≥ O විය යුතුය. T අවම වන්නේ θ = π විටය. [∵ අවම cos θ = -1 බැවින් ]

එවිට $T_{අවම} = mg(-1) + \frac{m}{\ell}[\frac{1}{4}u^2(1+e)^2\cos^2\alpha - 2g\ell(1+1)] \geq 0$ විය යුතුය.

$\Rightarrow \frac{m}{\ell}[\frac{1}{4}u^2(1+e)^2\cos^2\alpha - 5g\ell] \geq 0$

$u^2(1+e)^2\cos^2\alpha \geq 20g\ell$

$u^2\cos^2\alpha \geq \frac{20g\ell}{(1+e)^2}$

Q අංශුව පූර්ණ වෘත්ත ගෙන යාම සඳහා

$u\cos\alpha \geq \frac{2\sqrt{5g\ell}}{1+e}$ විය යුතුය

P හි ආරම්භක චලිතය සඳහා A → B සඳහා $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$0 = u^2\sin^2\alpha - 2gh \Rightarrow h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

ගැටුමින් පසු P හි වේගය $v_2$ බැවින් B සිට නැවත ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය හරහා ඇති තිරස් තලය දක්වා චලිතය සලකා.

$\downarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \frac{u\sin\alpha}{g} = t_1$

එම $t_2$ කාලය තුළ P හි තිරස් විස්ථාපනය b නම්

$b = v_2t_2 = \frac{u}{2}\cos\alpha(1-e)\frac{u\sin\alpha}{g}$

∴ P අංශුවේ මුළු තිරස් විස්ථාපනය $= a + b = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$

$+ \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}(1-e)$

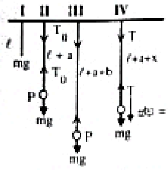
$= \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}[2 + 1 - e)$

$= \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}(3-e)$

$= \frac{u^2}{4g}\sin 2\alpha(3-e)$

e = 3 විට සම්පූර්ණ විස්ථාපනය ශුන්‍ය වන බැවින් P අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණේ.

04.



P අංශුව ස්ථිතික සමතුලිත පිහිටීමේ දී තන්තුවේ විතතිය a වන අතර ඇදී තන්තුවේ ආතතිය $T_0$ යයි ගනිමු.

(I හා II රූප සටහන්)

$T_0 = mg$ වන අතර $T_0 = \frac{\lambda a}{\ell}$ (හුක් ගේ නියමය අනුව)

$\therefore mg = \frac{\lambda a}{\ell} \Rightarrow a = \frac{mg\ell}{\lambda}$

IV අවස්ථාව සලකමු.

එවිට $T = \frac{\lambda(a+x)}{\ell}$

$\downarrow$ F = mg යෙදීමෙන්

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{\lambda(a+x)}{\ell} = m\ddot{x}$

$\cancel{m}g - \frac{\cancel{m}g}{a}(a+x) = \cancel{m}\ddot{x}$

$g - g - \frac{g}{a}x = \ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-g}{a}x$

මෙම සමීකරණය වලංගු වන්නේ තන්තුව ඇදී පවතින අවස්ථාවේ පමණි. ස. අ. චලිතයේ කේන්ද්‍රය x = 0 වන x = 0 විට බැවින් එය II සමතුලිත පිහිටීම වේ.

b > a බව දී ඇති නිසා මුදා හරින ලද අංශුව ඉහළට එසවී යන අතර x < -a විට චලිත සමීකරණය වලංගු නොවේ. (තන්තුව ඇඹිලෙන බැවින්)

∴ -a ≤ x ≤ b විට පමණක් අංශුවේ චලිත සමීකරණය

$\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$ වේ.

$x = A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t$ විසඳුමක් යයි උපකල්පනය කරමු.

t විෂයෙන් අවකලනයෙන්

$\dot{x} = -A\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$ — ①

t = 0 විට x = b වන අතර $\dot{x} = 0$ බැවින්

$b = A$ හා $0 = B\sqrt{\frac{g}{a}} \Rightarrow B = 0$

∴ විසඳුම $x = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$ වේ.

x = -a විට තන්තුව ඇඹිලෙන බැවින් ස. අ. ච. අවසන් වේ. එවිට $t = t_1$ නම්

$-a = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{a}}t_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$

$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$

$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}(\pi/2 + \alpha)$

$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{a}{b}$ වන පරිදි α කෝණයක් ගනිමු. එනම් $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ වන $t_1$ කාලයක් සඳහා අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදේ.

③ න් B = 0 බැවින්

$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$ බැවින්

$t = t_1\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ විට

$$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\times\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$$

$$= -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\alpha = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$$

$$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = -\sqrt{\frac{g}{a}(b^2-a^2)}$$

∴ අංශුව $t = t_1$ විට $\uparrow\sqrt{\frac{g}{a}(b^2-a^2)}$ ප්‍රවේගයෙන් අනුවර්තී චලිතයෙන් ඉවත් වී ගුරුත්වය යටතේ පමණක් සිරස්ව ඉහළට චලනය වේ.

අංශුවේ චලිතය සඳහා $\uparrow v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන් (සිරස්ව ගෙන)

$$u = \sqrt{\frac{g}{a}(b^2-a^2)} \quad , \; a = -g ,\; s = l$$

$$v^2 = \frac{g}{a}(b^2-a^2) - 2gl$$

$$= \frac{g}{a}[b^2-a^2-2al]$$

$$= \frac{g}{a}[b^2-a^2-2a\frac{\lambda a}{mg}] \quad \because a = \frac{mgl}{\lambda}$$ බව පෙර ලැබී ඇත.

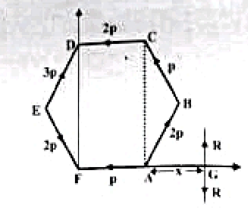
$$= \frac{g}{a}[b^2-a^2(1+\frac{2\lambda}{mg})]$$

සිරස්ව ප්‍රවේගයෙන් සීලිමේ ගැටීමට නම් $V^2 > 0$ විය යුතුයි.

මේ සඳහා $b^2-a^2(1+\frac{2\lambda}{mg}) > 0$ විය යුතුය.

$b > a\sqrt{1+\frac{2\lambda}{mg}}$ විය යුතුය.

05. (a)



බල විභේදනය කරමු

$\overrightarrow{X} = -P - 2P + 2P\cos 60 - P\cos 60 + 3P\cos 60 + 2P\cos 60$

$= -3P + 6P\cos 60$

$= -3P + 6P\times\frac{1}{2}$

$= -3P + 3P$

$\overrightarrow{X} = 0$

$\uparrow Y = (2P + P + 3P - 2P)\cos 30$

$= 4P\cos 30$

$= 4P\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\uparrow Y = 2\sqrt{3}P$

$X = 0$ බැවින් හා $Y \neq 0$ බැවින් පද්ධතිය $\uparrow$ දිශාවට වූ $R = 2\sqrt{3}P$ බලයකට තුල්‍ය වේ

A වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණ ගනිමු.

$\curvearrowleft A :\; P\times 2a\cos 30 + 2P\times 4a\cos 30 + 2P\times 2a\cos 30 - 3P\times 4a\cos 30$

$= 2Pa\cos 30\,[1 + 4 + 2 - 6] = Pa\sqrt{3}$

මේ අනුව බල පද්ධතිය A හරහා වූ $2\sqrt{3}P$ (AC දිශාවට) බලයකටත්, ABCD අතට වූ $\sqrt{3}$ Pa ඝූර්ණය සහිත බල යුග්මයකටත් ඌනනය වේ.

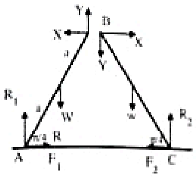
ප්‍රශ්නය, සමාන සමාන්තර බල දෙකකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කරමු. CA දිශාවට වූ $2\sqrt{3}P$ බලයක් හා එයට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට වූ $2\sqrt{3}P$ බලයක් (දික්කළ FA මත වූ G) පද්ධතියට එක් කරමු. $AG = x$ නම්, $2\sqrt{3}P\times x = Pa\sqrt{3}$ විය යුතුය.

එවිට $X = \frac{a}{2}$ වේ.

ඒ අනුව බල පද්ධතිය දික් කළ FA පාදය $AG = \frac{a}{2}$ වන පරිදි වූ G ලක්ෂ්‍යයේ ක්‍රියාකරන AC ට සමාන්තර වූ $2\sqrt{3}P$ කට බලයකට තුල්‍ය වේ.

පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවත්වා ගැනීම සඳහා G හරහා CA දිශාවට සමාන්තර වන පරිදි $2\sqrt{3}P$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් පද්ධතියට එක් කළ යුතුය. මෙම බලය R ට සමාන වේ.

(b)



පද්ධතියේ සමතුලිතතාවය සඳහා තිරස් විභේදනයෙන්
$\rightarrow F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = F$ යයි ගනිමු

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් (දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු)

$$W\times a\cos 45 + w\times 3a\cos 45 = R_2\times 4a\cos 45$$

$$\therefore \quad R_2 = \frac{W+3w}{4}$$

C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$W\times a\cos 45 + w\times 3a\cos 45 = R_1\times 4a\cos 45$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{3W+w}{4}$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්.

$$W\times\cancel{a}\,\cancel{\cos 45} + F_1\times 2\cancel{a}\,\cancel{\sin 45} - R_1\times 2\cancel{a}\,\cancel{\cos 45} = 0$$

$$\therefore \quad F_1 = \frac{R_1 - W}{2}$$

$$= \frac{2\left[\frac{3W+w}{4}\right] - W}{2}$$

$$F_1 = \frac{W+w}{4} = F_2$$ වේ.

A හිදී නොලිස්සීමට නම් $\frac{F_1}{R_1} \leq \mu$ ද

C හිදී නොලිස්සීමට නම් $\frac{F_2}{R_2} \leq \mu$ ද විය යුතුය.

එනම් $\frac{W+w}{3W+w} \leq \mu$ ද $\frac{W+w}{W+3w} \leq \mu$ ද විය යුතුය.

W > w බව දී ඇති නිසා අවශ්‍යතාවයන් ඉෂ්ට වීම සඳහා

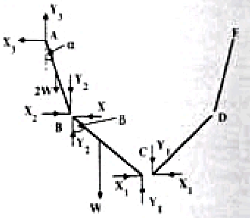
$\frac{W+w}{W+3w} \leq \mu$ විය යුතුය $\left[\because \frac{W+w}{3W+w} < \frac{W+w}{W+3w} \text{ නිසා}\right]$

$\therefore$ අවම $\mu = \frac{W+w}{W+3w}$

$\mu = \frac{W+w}{W+3w}$ නම් C ලක්ෂ්‍යය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතින අතර $\frac{F_1}{R_1} < \mu$ බැවින් A හිදී එසේ නොවේ.

එබැවින් A හිදී නොව C හිදී ලිස්සීම සිදුවීමට ආසන්න වේ.

06. (a)



දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.

පද්ධතිය C හරහා යන සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ.

$\therefore Y_1 = 0$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$W\times a\sin\beta = X_1\times 2a\cos\beta \Rightarrow X_2 = \frac{W}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

AB හා BC දඬු දෙකේ සමතුලිතතාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$2\cancel{W}\times\cancel{a}\sin\alpha + \cancel{W}\times(2\cancel{a}\sin\alpha + \cancel{a}\sin\beta)$$

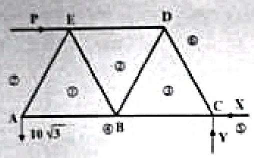
$$= \frac{W}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}(2a\cos\alpha + 2a\cos\beta)$$

$$2\sin\alpha + 2\sin\alpha + \sin\beta = \tan\beta\cos\alpha + \sin\beta$$

$$4\sin\alpha = \tan\beta\cos\alpha$$

$$4\tan\alpha = \tan\beta$$

(b)



දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.

රාමු සැකිල්ලේ සමතුලිතතාවය සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$10\sqrt{3} \times 4a = P \times 2a \tan 60 \Rightarrow 40\sqrt{3} = P \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{P = 40\ N}$

තිරස් විභේදනයෙන් ← $X = P = 40$

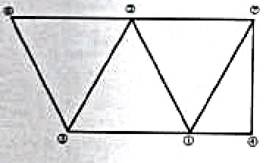
සිරස් විභේදනයෙන් ↑ $Y = 10\sqrt{3}$

C හි ප්‍රතික්‍රියාව $= \sqrt{40^2 + (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{1900} = 10\sqrt{19}\ N$

C හි ප්‍රතික්‍රියාව තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

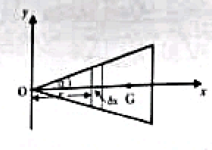
$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{10\sqrt{3}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ප්‍රත්‍යාබල සටහන



| දණ්ඩ | ප්‍රත්‍යාබලය | විශාලත්වය |
|---|---|---|
| AB | තෙරපුම | 10 N |
| AE | ආතතිය | 20 N |
| BE | තෙරපුම | 20 N |
| DE | තෙරපුම | 20 N |
| BD | ආතතිය | 20 N |
| CD | තෙරපුම | 20 N |
| BC | තෙරපුම | 30 N |

07.



සමමිතිකත්වයෙන් කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G නම් $G \equiv (\bar{x}, 0)$ ආකාරය වේ.

y අක්ෂයේ සිට x දුරින් වූ ඝනකම δx වූ තුනී තැටියක් සලකමු

එම තැටියේ පරිමාව $= \pi (x \tan\alpha)^2\, \delta x$

කේතුවේ ඝනත්වය ρ නම්

තැටියේ බර $= \pi (x \tan\alpha)^2\, \delta x \times \rho$

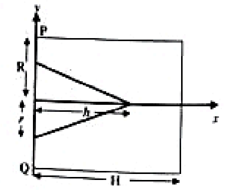
ගු. කේ. අර්ථ දැක්වීමෙන්

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha\, dx\rho \times x}{\int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha\, dx\rho}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}[x^4]_0^h}{\frac{1}{3}[x^3]_0^h} = \frac{3}{4}h$$

$$\therefore G \equiv (\tfrac{3}{4}h, 0)$$

සමමිතිකත්වයෙන් අච්චුවේ ගු. කේ. ය x අක්ෂය මත පිහිටයි.



| වස්තුව | බර | ගු. කේ. O y අක්ෂයේ සිට දුර |
|---|---|---|
| සිලින්ඩරය | $\pi R^2 H\rho$ | $\frac{H}{2}$ |
| කේතුව | $\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho$ | $\frac{h}{4}$ |
| අච්චුව | $\pi\rho(R^2H - \frac{1}{3}r^2h)$ | $\bar{x}$ |

ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\pi R^2 H\rho \times \frac{H}{2} - \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho \times \frac{h}{4} = \pi\rho\left(R^2H - \frac{1}{3}r^2h\right)\bar{x}$$

$$\frac{R^2H^2}{2} - \frac{r^2h^2}{2} = \frac{(3R^2H - r^2h)}{3}\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{6R^2H^2 - r^2h^2}{4(3R^2H - r^2h)}$$

අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, කේතු කුහරයේ ශීර්ෂය පිහිටයි නම් $\bar{x} = h$ වන අතර $R = 2r$ බැවින්

$$h = \frac{6 \times 4r^2 \times H^2 - r^2h^2}{4[3(2r)^2H - r^2h]}$$

$$h = \frac{24r^2H^2 - r^2h^2}{4[12r^2H - r^2h]} = \frac{24H^2 - h^2}{4(12H - h)}$$

$$48Hh - 4h^2 = 24H^2 - h^2$$

$$3h^2 - 48Hh + 24H^2 = 0$$

$$h^2 - 16Hh + 8H^2 = 0$$

$$h = \frac{16H \pm \sqrt{256H^2 - 32H^2}}{2}$$

$$= \frac{16H \pm 2\sqrt{56H^2}}{2}$$

$$h = 8H \pm 2\sqrt{14}H$$

$H > h$ බැවින් $h = 8H - 2\sqrt{14}H$

$\therefore \quad h = 2(4 - \sqrt{14})H$ වේ

$PO = R = 2r$ දී ඇත.

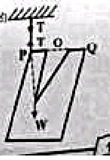
PQ රේඛාව යටි අත් සිරස සමඟ සාදන කෝණය θ නම්

$$\tan\theta = \frac{\text{කේතුවේ උස}}{\text{සිලින්ඩරයේ අරය}} = \frac{OG}{PO} = \frac{\bar{x}}{2r}$$

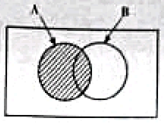
$$\tan\theta = \frac{2(4 - \sqrt{14})H}{2r}$$

$$= \frac{\cancel{2}(4 - \sqrt{14})3\cancel{r}}{\cancel{2r}} \quad (\because H = 3r \text{ බැවින්})$$

$$\theta = \tan^{-1}[3(4 - \sqrt{14})]$$



08.



$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ වේ

$\therefore P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')]$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

(∵ $A \cap B$ හා $A \cap B'$ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධීන් නිසා)

එවිට $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ — ①

$A \cup B = B \cup (A \cap B')$

$\therefore P(A \cup B) = P[B \cup (A \cap B')]$ [∵ B හා $A \cap B'$ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ]

$= P(B) + P(A \cap B')$

$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$ (① න්)

A හා B ස්වායත්ත සිද්ධීන් බව දී ඇත.

(i) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ ① න්

$= P(A) - P(A)P(B)$ (A හා B ස්වායත්ත බැවින්)

$= P(A)[1 - P(B)]$

$P(A \cap B') = P(A)P(B')$

∴ A හා B′ ස්වායත්ත වේ

(ii) $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$ ; ද මෝගන් නියම අනුව

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$

$= 1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)]$

$= P(A') - P(B)P(A')$

$= P(A')[1 - P(B)]$

$= P(A')P(B')$

∴ A′ හා B′ ද ස්වායත්ත වේ.

C ; එක්දින තරඟාවලියකට පෙර X නමැති පිතිකරුවා ආබාධයකට ලක්වීම.

D ; එක්දින තරඟාවලියකට පෙර Y නමැති පන්දුයවන්නා ආබාධයකට ලක්වීම යැයි අපි දක්වමු

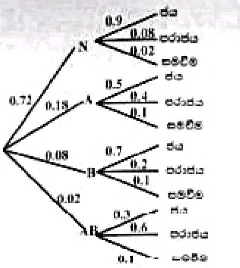
P(C) = 0.2 හා P(D) = 0.1 බව දී ඇත.

N ; X හෝ Y දෙදෙනාගෙන් කිසිවකුත් ආබාධයකට ලක් නොවීම.

A ; X පමණක් ආබාධයකට ලක් වීම

B ; Y පමණක් ආබාධයකට ලක් වීම

AB ; X සහ Y දෙදෙනාම ආබාධයකට ලක් වීම.



රුක් සටහන අනුව

$P(N) = P(C' \cap D')$

$= P(C') \times P(D')$ ( ∵ C හා D ස්වායත්ත සිද්ධීන් නිසා)

$= [1 - P(C)]\,[1 - P(D)]$

$= (1 - 0.2)\,(1 - 0.1)$

$= 0.8 \times 0.9$

$= \underline{\underline{0.72}}$

$P(A) = P(C \cap D')$

$= P(C) \times P(D')$

$= 0.2 \times (1 - 0.1)$ [ ∵ P(D) = 0.1 බැවින් ]

$= \underline{\underline{0.18}}$

$P(B) = P(C' \cap D)$

$= P(C') \times P(D)$ [ ∵ P(C) = 0.2 බැවින් ]

$= (1 - 0.2) \times 0.1$

$= \underline{\underline{0.08}}$

$P(AB) = P(C \cap D)$

$= P(C) \times P(D)$ [ ∵ C හා D ස්වායත්ත බැවින් ]

$= 0.1 \times 0.1$

$= \underline{\underline{0.02}}$

ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ලබන එක තරඟාවලිය

ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාව $= (0.72 \times 0.9) + (0.18 \times 0.5) + (0.08 \times 0.7) + (0.02 \times 0.3)$

$= 0.648 + 0.090 + 0.056 + 0.006$

$= 0.8$

ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ලබන එක තරඟාවලිය

පරාජය වීමේ සම්භාවිතාව $= (0.72 \times 0.08) + (0.18 \times 0.4) + (0.08 \times 0.2) + (0.02 \times 0.6)$

$= 0.0576 + 0.072 + 0.016 + 0.012$

$= 0.1576$

Y ආබාධයකට ලක්ව ඇති විටක ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම පරාජයට පත්වීමේ සම්භාවිතාව $= 0.08 \times 0.2$

$= 0.016$

අපේක්ෂිත සම්භාවිතාව එරට දක්වීමට අනුව ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම පරාජයට පත්ව ඇති බව දී ඇතිවිට [illegible] තරඟාවලියට පෙර Y ආබාධයකට ලක්වීමේ

සම්භාවිතාව $= \dfrac{0.016}{0.1576} = \dfrac{20}{197}$

09. (a) $\{x_1, x_2 \dots\dots\dots x_n\}$ දත්ත කුලකයේ

මධ්‍යන්‍යය $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ හා

විචලතාව $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ වේ.

මෙහි $\bar{x}$ යනු මධ්‍යන්‍යය වේ

නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය = 58 ; නිවැරදි විචලතාව = 3.2

නිවැරදි නිරීක්ෂණ දෙකෙහි එකතුව = 63 + 55 = 118

සාවද්‍ය නිරීක්ෂණ දෙකෙහි එකතුව = 65 + 53 = 118

[illegible] සමාන බැවින් මධ්‍යන්‍යය කෙරෙහි බලපෑමක් සිදු නොවේ

විචලතාව $= \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2$

නිවැරදි විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{38} (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - x_{39})^2 + (\bar{x} - x_{40})^2\right)$$

මෙහි $x_{39} = 63$ හා $x_{40} = 55$ ද $\bar{x} = 58$ ද වේ

නිවැරදි විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{38} (x_i - 58)^2 + (58 - 63)^2 + (58 - 55)^2\right) \text{— ①}$$

සාවද්‍ය විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{38} (x_i - 58)^2 + (58-65)^2 + (58-53)^2\right) \text{— ②}$$

① - ② නිවැරදි විචලතාව - සාවද්‍ය විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 58)^2 + 25 + 9 - \sum_{i=1}^{38} (x_i - 58)^2 - 49 - 25\right\}$$

නිවැරදි විචලතාව - 3.2 $= \frac{1}{40}\,(-40)$

නිවැරදි විචලතාව $= 3.2 - 1.0$

$= 2.2$

විචලතාව අඩු වී ඇත.

(b)

| පන්ති ප්‍රාන්තරය | මධ්‍ය අගය | සංඛ්‍යාතය $f_i$ | අපගමනය | $U_i$ | $f_iU_i$ | $f_iU_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0-10 | 5 | 10 | -20 | -4 | -40 | 160 |
| 10-20 | 15 | 27 | -15 | -3 | -81 | 243 |
| 20-30 | 25 | 33 | -10 | -2 | -66 | 132 |
| 30-40 | 35 | 35 | -5 | -1 | -35 | 35 |
| 40-50 | 45 | 38 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50-60 | 55 | 30 | 5 | 1 | 30 | 30 |
| 60-70 | 65 | 19 | 10 | 2 | 38 | 76 |
| 70-80 | 75 | 8 | 15 | 3 | 24 | 72 |
|  |  | 200 |  |  | -130 | 748 |

මධ්‍යන්‍යය $\bar{x} = 45 + \frac{(-130)}{200} \times 10 = 45 - 0.65 \times 10 = 45 - 6.5$

$\underline{\bar{x} = 38.5}$

මධ්‍යස්ථය $= L + \dfrac{\left[\frac{N}{2} - cf\right]c}{f_{med}}$

$= 40 + \dfrac{\left[\frac{200}{2} - 70\right]}{35}\,10$

$= \underline{\underline{38.57}}$

මාතය $= L + \dfrac{(f_1 - f_0)\,c}{(2f_1 - f_2 - f_0)}$

$= 40 + \dfrac{(38 - 35) \times 10}{76 - (35 + 30)}$

$= \underline{\underline{42.73}}$

මධ්‍යන්‍යය < මධ්‍යස්ථය < මාතය වේ. ඒ අනුව [illegible]

[illegible]

$\frac{1500}{38.5}$ ට හා $\frac{1500}{42.73}$ ට 35 වන අතර

[illegible] 35 [illegible]

විචලතාව $= c^2\left\{\dfrac{\sum f_iU_i^2}{\sum f_i} - \left(\dfrac{1}{\sum f_i}\sum f_iU_i\right)^2\right\}$

$= 100\left\{\dfrac{748}{200} - \left(\dfrac{-130}{200}\right)^2\right\}$

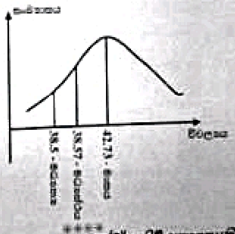
සම්මත අපගමනය $= \underline{\underline{18.21}}$

කුටිකතා සංගුණකය $= 3\,\dfrac{\text{මධ්‍යන්‍යය - මධ්‍යස්ථය}}{\text{සම්මත අපගමනය}}$

$= 3\,\dfrac{(38.5 - 38.57)}{18.21}$

$= \underline{\underline{0.115}}$

(-) සෘණ කුටිල ව්‍යාප්තියකි



****