01. (a) $y(p-x) = p + x \Rightarrow yp - yx = p + x$

$$yp - p = yx + x$$

$$x = \frac{p(y-1)}{(y+1)} \quad \text{මෙහි } y \neq -1$$

x සඳහා $f(x) = 0$ හි ආදේශ කිරීමෙන්

$$f(x) = x^2 + px + q = \left\{\frac{p(y-1)}{y+1}\right\}^2 + p\left\{\frac{p(y-1)}{y+1}\right\} + q = 0$$

එනම් $p^2(y-1)^2 + p^2(y^2-1) + q(y+1)^2 = 0$

$$g(y) = (2p^2 + q)y^2 + 2(q - p^2)y + q = 0$$

මෙහි $y \neq -1$

α හා β යනු $f(x) = x^2 + px + q = 0$ හි මූල නිසා

$\alpha + \beta = -p$ හා $\alpha\beta = q$ වේ.

$x = \alpha$ විට $y = \frac{p+\alpha}{p-\alpha} = \frac{-\alpha-\beta+\alpha}{-\alpha-\beta-\alpha} = \frac{-\beta}{-2\alpha-\beta} = \frac{\beta}{2\alpha+\beta}$

තවද, α යනු $f(x) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බැවින්

$y = \frac{\beta}{2\alpha+\beta}$, $g(y) = 0$ සමීකරණය සපුරාලයි.

එබැවින් $\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$, $g(y) = 0$ හි මූලයක් වේ.

එලෙසම $x = \beta$ විට, $y = \frac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ වන අතර

$\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ ද $g(y) = 0$ හි මූලයක් වේ.

$g(y) = 0$ වර්ගජ සමීකරණයක් බැවින් $g(y) = 0$ හි මූල

$\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ හා $\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$ වේ.

දැන් $\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2$

$$- 2\,\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\cdot\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$$

$$= \left(\frac{-2(q-p^2)}{2p^2+q}\right)^2 - 2\left(\frac{q}{2p^2+q}\right)$$

$$= \frac{4(q^2 - 2p^2q + p^4) - 2q(2p^2+q)}{(2p^2+q)^2}$$

$$= \frac{2q^2 - 12p^2q + 4p^4}{(2p^2+q)^2}$$

$$= \frac{2(q^2 - 6p^2q + 2p^4)}{(2p^2+q)^2}$$

(b) $(y+ax)(y+bx)(y+cx) = y^3 + (a+b+c)y^2x + (ab+bc+ca)x^2y + abcx^3$

$$= y^3 - 3myx^2 + abcx^3$$

$(\because a+b+c = 0$ හා $ab+bc+ca+3m = 0)$

$$= y(y^2 - 3mx^2) + abcx^3$$

$y = x^2 + m$ විට

$(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)(x^2+cx+m)$

$$= (x^2+m)[(x^2+m)^2 - 3mx^2] + abc\,x^3$$

$$= (x^2+m)(x^4 + 2mx^2 + m^2 - 3mx^2) + abc\,x^3$$

$$= x^6 + abc\,x^3 + m^3 \quad \text{—— ①}$$

$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ට (x^2-2x+m), (x^2+ax+m) හා (x^2+bx+m) යන සාධක ඇති නම්

$x^6 + 16x^3 + 64 = (x^2-2x+m)(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)$

දෙපස ලබන සමීකරණය ① සමීකරණය සමග සැසඳීමෙන්

$m^3 = 64$ හා $-2ab = 16 \Rightarrow m = 4$ හා $ab = -8$

තවද $-2 + a + b = 0$ වේ $\Rightarrow a + b = 2$

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ බැවින්

$= 4 - 4(-8) = 36$

$\Rightarrow a - b = \pm 6 \Rightarrow 2a = 8$ හෝ $-4 \Rightarrow a = 4$ හෝ -2

$a = -2$ විට $b = 4$ හෝ $a = 4$ විට $b = -2$ හෝ වේ.

එනම් $m = 4, a = -2, b = 4$ හෝ $m = 4, a = 4, b = -2$

(i) $g(x) = (x^2 - 2x + 4)^2(x^2 + 4x + 4)$

$= (x^2 - 2x + 4)^2(x+2)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $g(x) = 0$ හි මූල

$(x^2 - 2x + 4)^2(x+2)^2 = 0$

$[(x-1)^2 + 3]^2(x+2)^2 = 0$

$[(x-1)^2 - (\sqrt{3}\,i)^2]^2(x+2)^2 = 0$

$[x - 1 + \sqrt{3}\,i]^2[x - 1 - \sqrt{3}\,i]^2(x+2)^2 = 0$

$x = 1 - \sqrt{3}\,i$ (සංකීර්ණ) හෝ $x = 1 + \sqrt{3}\,i$ (සංකීර්ණ)

හෝ $x = -2$ (තාත්වික)

02. (a) (i) පුනරාවර්තනයට ඉඩ ඇති විට සෑදිය හැකි සංඛ්‍යාංක 4 හි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$

(ii) පුනරාවර්තනයට ඉඩ නොමැති විට සෑදිය හැකි සංඛ්‍යාංක 4 හි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

(i) පුනරාවර්තනයේදී එකම සංඛ්‍යාංකය යෙදෙන සංඛ්‍යාංක සහිත සංඛ්‍යා ගණන

$= {}^7C_1 \times \frac{4!}{4!}$

$= 7 \times 1 = 7$

[illegible] $= {}^7C_1 \times {}^6C_1$

[illegible]
$= {}^7C_1 \times {}^6C_1 \times \frac{4!}{3!}$
$= 7 \times 6 \times 4 \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}$
$= 168$

[illegible]
$= 2401 - (168 + 7)$
$= 2226$

(ii) [illegible]
[illegible] $= {}^4C_2$
[illegible] $= {}^3C_2$
[illegible] $= 4!$

[illegible]
$= {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 4!$
$= 6 \times 3 \times 24$
$= 432$

[illegible]

[illegible] $= {}^4C_1 = 4$

[illegible] $= {}^3C_2 \times {}^3C_1$

[illegible] $= {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3!$

[illegible] (ii) [illegible]
$= {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3! \times 4$
$= 9 \times 6 \times 4 = 216$

(b) $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \dots + {}^nC_r x^r + \dots + {}^nC_n x^n$

$(1+x)^{n-1}(1+x)$ [illegible]
$= (1+x)\left[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1 x + {}^{n-1}C_2 x^2 + \dots + {}^{n-1}C_r x^r + \dots + {}^{n-1}C_{n-1} x^{n-1}\right]$

$= {}^{n-1}C_0 + ({}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_0)x + ({}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1)x^2 + \dots + ({}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1})x^r + \dots + {}^{n-1}C_{n-1}x^n$

දැන් $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$
${}^nC_0 = {}^{n-1}C_0 = {}^{n-1}C_{n-1} = {}^nC_n = 1$ [illegible]

[illegible] x^r [illegible]
${}^nC_r = {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1}$ $r = 1, 2, \dots n-1$ සඳහා

[illegible]
${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots + (-1)^r\,{}^nC_r + \dots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$

$= {}^nC_0 - ({}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1) + ({}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2) - \dots + (-1)^{n-1}({}^{n-1}C_{n-2} + {}^{n-1}C_{n-1}) + (-1)^n\,{}^nC_n$

$= {}^nC_0 - {}^{n-1}C_0 - {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 - {}^{n-1}C_2 + \dots + (-1)^{n-1}\,{}^{n-1}C_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$

$= 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n$
$= \underline{\underline{0}}$

[illegible]

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + \dots + {}^nC_r x^r + \dots + {}^nC_n x^n$ හි $x = -1$ [illegible]

$0 = {}^nC_0 + {}^nC_1(-1) + {}^nC_2(-1)^2 + \dots + {}^nC_r(-1)^r + \dots {}^nC_n(-1)^n$
${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots + (-1)^r\,{}^nC_r + \dots + (-1)^n\,{}^nC_n = 0$
n [illegible]
${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots - {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 0$ වේ. —— ①

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \dots + {}^nC_r x^r + \dots {}^nC_n x^n$
$x = 1$ විට $2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_r + \dots + {}^nC_n$ — ②
① + ② $2^n = 2({}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots + {}^nC_n)$
$\Rightarrow {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots {}^nC_n = 2^{n-1}$

03. $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4$
$n = 1$ විට L.H.S $= 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1 = 1$
R.H.S $= 1^4 - (1-1)^4 = 1$
$\therefore n = 1$ විට [illegible]

$n = p$ විට [illegible] $p \in \mathbb{Z}^+$
එවිට $4p^3 - 6p^2 + 4p - 1 = p^4 - (p-1)^4$ වේ.

$n = p+1$ විට L.H.S $= 4(p+1)^3 - 6(p+1)^2 + 4(p+1) - 1$
$= 4p^3 + 12p^2 + 12p + 4 - 6p^2 - 12p - 6 + 4p + 4 - 1$
$= 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$
$= p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 - p^4$
$= (p+1)^4 - p^4$
$n = p+1$ R.H.S $= (p+1)^4 - p^4$
$\therefore n = p+1$ විට ද [illegible]

[illegible]
n සඳහා [illegible]

[illegible]
$r = 1, 2, 3, \dots$ සඳහා $4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$
$= r^4 - (r-1)^4$
$= U_r - U_{r-1}$

මෙහි $U_r = r^4$ වේ.
දැන් $U_r - U_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$
$r = 1$ විට $U_1 - U_0 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$
$r = 2$ විට $U_2 - U_1 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$
$r = 3$ විට $U_3 - U_2 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$
$\vdots$
$r = n-1$ විට $U_{n-1} - U_{n-2} = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$
$r = n$ විට $U_n - U_{n-1} = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

$$U_n - U_0 = 4\sum_{r=1}^{n} r^3 - 6\sum_{r=1}^{n} r^2 + 4\sum_{r=1}^{n} r - n$$

$$\therefore 4\sum_{r=1}^{n} r^3 = 6\sum_{r=1}^{n} r^2 - 4\sum_{r=1}^{n} r + n + U_n - U_0$$

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = \cancel{6}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} - \cancel{4}\,\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + n + n^4$$

$= n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n(n^3+1)$
$= n(n+1)[2n+1-2+(n^2-n+1)]$
$= n(n+1)(n^2+n)$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \underline{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

$1^2 + (1^2+2^2) + (1^2+2^2+3^2) + \dots$ [illegible] r [illegible]
$V_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + r^2$ වේ.

දැන් $V_r = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$
$= \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$

$$\sum_{r=1}^{n} V_r = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n} r^3 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n} r$$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\,\frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{12}\,[n^2 + n + 2n + 1 + 1]$

$= \frac{n(n+1)}{12}\,(n^2 + 3n + 2)$

$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

$\sum_{r=1}^{\infty} V_r = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \to \infty$

[illegible]

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2} + \dots$$

මෙහි r [illegible] $W_r = \frac{2r+1}{1^2+2^2+3^2+\dots+r^2}$

$= \frac{2r+1}{\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}}$

$= \frac{6}{r(r+1)} = \frac{6}{r} - \frac{6}{r+1}$

$= f(r) - f(r+1)$

මෙහි $f(r) = \frac{6}{r}$ වේ.

දැන් $r = 1$ විට $W_1 = f(1) - f(2)$
$r = 2$ විට $W_2 = f(2) - f(3)$
$r = 3$ විට $W_3 = f(3) - f(4)$
$\vdots$
$r = n-1$ විට $W_{n-1} = f(n-1) - f(n)$
$r = n$ විට $W_n = f(n) - f(n+1)$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} W_r = f(1) - f(n+1)$$

$= 6 - \frac{6}{(n+1)}$

වේ.

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(6 - \frac{6}{n+1}\right) = 6 - \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}$

$= 6 \quad \left(\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1} = 0\right)$

[illegible]
වේ.

04. (a) $Z = x + iy$ [illegible] $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ [illegible]

[illegible] $Z - a = (x - a) + iy$ [illegible]

$Z + a = (x + a) + iy$ වේ.

$|Z - a| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$ [illegible]

$|Z + a| = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$ විට

$|Z - a| = |Z + a|$ විට

$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$

[illegible] $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 + y^2$

$\Rightarrow 4ax = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad (\because a \neq 0$ බැවින්$)$

[illegible] $|Z - a| = |Z + a|$ [illegible] Z [illegible] [illegible] වේ.

[illegible] Z [illegible] වේ.

(b) $|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$

$Z_2 \neq 0$ බැවින් $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2} - 2\right| = \left|\dfrac{Z_1}{Z_2} + 2\right|$

[illegible] (a) [illegible] $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ [illegible] [illegible] වේ.

[illegible] $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ [illegible] [illegible] වේ.

[illegible] $\dfrac{Z_1}{Z_2} = k$ [illegible] $k \in \mathbb{R}$ [illegible]

(i) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ [illegible]

[illegible] බැවින්

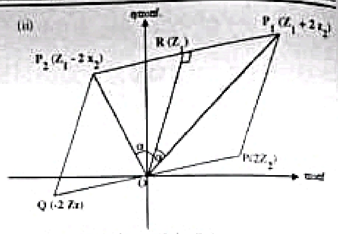
$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

[illegible] වේ.

[illegible] $\left|\arg\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)\right| = |\arg(Z_1) - \arg(Z_2)|$

$= \dfrac{\pi}{2}$

(ii)



$|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$ බැවින්

$OP_2 = OP_1$

[illegible] $RP_1 = OP = |2Z_2| = |-2Z_2|$

$OQ = RP_2$

$RP_1 = RP_2$

$\therefore O\hat{R}P_1 = \pi/2$

[illegible] $\tan\alpha = \dfrac{RP_1}{OR} = \dfrac{OP}{OR} = \dfrac{|2Z_2|}{|Z_1|} = 2\left|\dfrac{Z_2}{Z_1}\right|$

$= \dfrac{2}{|k|} \qquad \left(\because \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|} = k\right)$

OP_1 [illegible] OP_2 [illegible] $\alpha \neq \pi/4$

$\Rightarrow \tan\alpha \neq 1 \Rightarrow |k| \neq 2$

[illegible] $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{2}{|k|}}{1 - \dfrac{4}{|k|^2}} = \dfrac{4|k|}{k^2 - 4}$

[illegible] $P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{4|k|}{k^2 - 4}\right)$

$OP_1 \perp OP_2$ [illegible] $\alpha = \pi/4$

$\tan\alpha = \dfrac{2}{|k|} = 1 \quad \Rightarrow |k| = 2 \quad \Rightarrow k = \pm 2$

05. (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x + x\sin 3x}{x^2}$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{3\sin 3x}{3x}$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} + 3\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

$\displaystyle = 8\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + 3\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

$\displaystyle = 8 \times 1^2 + 3 \times 1 = 11 \left(\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right)$

(b) (i) $z = \tan^{-1} x \Rightarrow \tan z = x$

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}\right)$ [illegible]

[illegible]

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1 + \tan^2 z} - 1}{\tan z}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{\sec z - 1}{\tan z}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1 - \cos z}{\sin z}\right)$

$= \tan^{-1} \dfrac{2\sin^2 z/2}{2\sin z/2 \cos z/2} = \tan^{-1}(\tan z/2)$

$= z/2$

$\therefore \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{2}$

(ii) $y = e^{m\sin^{-1} x}$ x [illegible]

$\dfrac{dy}{dx} = e^{m\sin^{-1} x} \times \dfrac{m}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - x^2}\dfrac{dy}{dx} = my$

x [illegible]

$\sqrt{1 - x^2}\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\dfrac{dy}{dx} = m\dfrac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = m\sqrt{1 - x^2}\dfrac{dy}{dx}$

$= m^2 y$

[illegible] $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - m^2 y = 0$

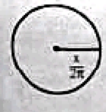
[illegible] x [illegible]

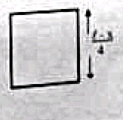
$(1 - x^2)\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2x\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - m^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

[illegible] $(1 - x^2)\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (1 + m^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$x = 0$ විට

$y = 1, \dfrac{dy}{dx} = m, \dfrac{d^2y}{dx^2} = m^2 \quad \dfrac{d^3y}{dx^3} = m(1 + m^2)$





[illegible] $= \dfrac{x}{2\pi}$ [illegible] $= \dfrac{l - x}{4}$

[illegible] $= \pi\left[\dfrac{x}{2\pi}\right]^2 \quad \dfrac{x^2}{4\pi}$ = [illegible]

[illegible] $= \left(\dfrac{l - x}{4}\right)^2$ [illegible]

$A(x) = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{(l - x)^2}{16}$ [illegible]

$\dfrac{d(A(x))}{dx} = \dfrac{1}{4\pi} 2x - \dfrac{1}{16} 2(l - x) = \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{l}{8} + \dfrac{x}{8}$

$= \dfrac{(4 + \pi)}{8\pi} x - \dfrac{\pi l}{8\pi} = \left(\dfrac{4 + \pi}{8\pi}\right)\left[x - \dfrac{\pi l}{4 + \pi}\right]$

$\dfrac{d A(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi l}{4 + \pi}$

	$x < \dfrac{\pi l}{4 + \pi}$	$x = \dfrac{\pi l}{4 + \pi}$	$x > \dfrac{\pi l}{4 + \pi}$
$\dfrac{d A(x)}{dx}$	(-)	0	(+)

$\therefore x = \dfrac{\pi l}{4 + \pi}$ විට A (x) [illegible] වේ.

$x = \dfrac{\pi l}{4 + \pi}$ විට [illegible] $= \dfrac{x}{\pi} = \dfrac{l}{4 + \pi}$ [illegible]

[illegible] $= \dfrac{l - x}{4} = \dfrac{l}{4} - \dfrac{\pi l}{4(4 + \pi)}$

$= \dfrac{4l + \pi l - \pi l}{4(4 + \pi)}$

$= \dfrac{l}{4 + \pi}$

$\therefore$ [illegible] A (x) [illegible] වේ.

06. (a) $\dfrac{2x}{(1 + x^2)(1 + x)^2} = \dfrac{Ax + B}{1 + x^2} + \dfrac{C}{(1 + x)} + \dfrac{D}{(1 + x)^2}$

$\Rightarrow 2x = (Ax + B)(1 + x)^2 + C(1 + x^2)(1 + x) + D(1 + x^2)$

$= (A + C)x^3 + (2A + B + C + D)x^2$

$+ (A + 2B + C)x + (B + C + D)$

[illegible]

$A + C = 0, \; 2A + B + C + D = 0, \; A + 2B + C = 2,$

$B + C + D = 0$

① හා ③ න් $2B = 2 \Rightarrow B = 1$

② න් ④ න් $2A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0$

එවිට ④ න් $D = -1$

$A = C = 0,\ B = 1,\ D = -1$

$$\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}\,dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)} - \int \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$= \tan^{-1}x + \frac{1}{1+x} + C$$

මෙහි C අභිමත නියතයකි

(b) (i)
$$\begin{aligned} bI &= b\int e^{ax}\cos bx\,dx \\ &= \int e^{ax}\,d(\sin bx) \\ &= e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\, d(e^{ax}) \\ &= e^{ax}\sin bx - a\int e^{ax}\sin bx\,dx \\ &= e^{ax}\sin bx - aJ \end{aligned}$$

$bI + aJ = e^{ax}\sin bx$ ——— ①

(ii)
$$\begin{aligned} aI &= \int ae^{ax}\cos bx\,dx = \int \cos bx\, d(e^{ax}) \\ &= e^{ax}\cos bx - \int e^{ax}\,d(\cos bx) \\ &= e^{ax}\cos bx + \int e^{ax}\,b\sin bx\,dx \\ &= e^{ax}\cos bx + bJ \end{aligned}$$

$aI - bJ = e^{ax}\cos bx$ ——— ②

①×b + ②×a

$(b^2 + a^2)I = b\,e^{ax}\sin bx + a\,e^{ax}\cos bx$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,[b\sin bx + a\cos bx]$$

①×a - ②×b

$(a^2+b^2)J = e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)$

$$J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx)$$

(c) $x^3t + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{t}$

$\Rightarrow 3x^2\,dx = \frac{1}{t^2}\,dt$

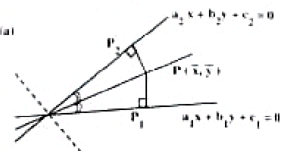
$x = -1$ විට $t = 1$ හා $x = -1/2$ විට $t = 8$

$$\int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x(x^3-1)} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{-1/2} \frac{3x^2\,dx}{x^3(x^3-1)} = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{-1}{t}\left(\frac{-1}{t}-1\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{dt}{(1+t)} = \frac{1}{3}\,[\ln|1+t|]_1^8$$

$$= \frac{1}{3}\,[\ln 9 - \ln 2] = \frac{1}{3}\ln\frac{9}{2}$$

07. (a)



දී ඇති රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් $P(\bar{x}, \bar{y})$ යයි ගනිමු.
P සිට $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ රේඛාවලට ඇඳි ලම්බවල අඩි P_1 හා P_2 නම්

$$PP_1 = \frac{|a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \text{ හා } PP_2 = \frac{|a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

එවිට $PP_1 = PP_2$ බැවින්

$$\frac{|a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{|a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ සමච්ඡේදක මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් බැවින් සමච්ඡේදක වල සමීකරණය

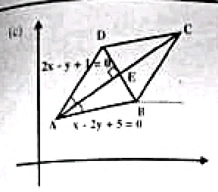
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ වේ}$$

(b) (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය හා (x, y) ලක්ෂ්‍යය අතර දුර

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(at)^2 + (bt)^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)t^2} = \sqrt{a^2+b^2}\,|t| \\ &= |t| \quad (\because a^2 + b^2 = 1) \end{aligned}$$

$\therefore |t|$ යනු රේඛාව දිගේ (x_0, y_0) සිට (x, y) ට ඇති දුර වේ.

(c)



ඉහත (a) කොටස අනුව $B\hat{A}D$ හි සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{x - 2y + 5}{\sqrt{5}}$$

එනම්

$x + y - 4 = 0$ හා $3x - 3y + 6 = 0$

$x - y + 2 = 0$ වේ.

AC යනු BAD හි සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය වේ. එවිට

$B\hat{A}C = D\hat{A}C < \pi/4$ විය යුතු ය.

දැන් $x + y - 4 = 0$ හා AD රේඛා අතර කෝණය α යයි ගනිමු

එවිට $\tan\alpha = \left|\frac{-1-2}{1+(-1)\times 2}\right| = \left|\frac{-3}{-1}\right| = 3 > 1$

$\therefore \alpha > \pi/4$

$\therefore$ AC හි සමීකරණය $x - y + 2 = 0$ වේ.

$x + y - 4 = 0$ හා $2x - y + 1 = 0$ විසඳීමෙන් $A \equiv (1, 3)$

(b) කොටස අනුව AC හි සමීකරණය $\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = t$ ලෙස ගත හැක.

A සිට $2\sqrt{2}$ දුරින් AC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය

$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = |2\sqrt{2}| \text{ මගින් ලැබේ.}$$

එවිට $x - 1 = 2$ හා $y - 3 = 2$ හෝ $x - 1 = -2$ හා $y - 3 = -2$

එනම් (3, 5) හෝ (-1, 1) ඉදන ලක්ෂ්‍ය වේ.
ABCD පූර්ණ ලෙස පළමු චතුර්ථකය තුළ පිහිටන බැවින්
$C \equiv (3, 5)$ වේ.

BC // AD බැවින් BC හි සමීකරණය $2x - y + \lambda = 0$ ආකාර වේ.
මෙය C (3, 5) හරහා යන බැවින්

$2\times 3 - 5 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

එනම් BC හි සමීකරණය $2x - y - 1 = 0$ වේ.
DC // AB බැවින් DC හි සමීකරණය
$x - 2y + \mu = 0$ ආකාර වේ. මෙයද C හරහා යන බැවින්
$3 - 2\times 5 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 7$
$\therefore$ DC හි සමීකරණය $x - 2y + 7 = 0$ වේ.

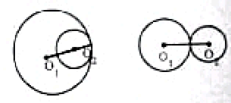
$DE = AE\tan\theta = \sqrt{2}\times\frac{1}{3}\ (\theta = 90 - \alpha)$

$= \frac{\sqrt{2}}{3}$ ඒකක

ABCD හි වර්ගඵලය $= 4$ ADE $\Delta = 4\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{2}$

$= \frac{4}{3}$ වර්ග ඒකක

08.



$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ හා
$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ යන වෘත්ත දෙකෙහි
කේන්ද්‍ර අතර දුර d නම්

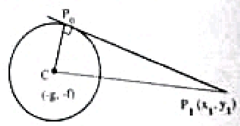
$d = \sqrt{(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2}$ වේ.

ඒවායේ අරයන් පිළිවෙළින් r_1 හා r_2 නම්

$r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$ හා $r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$ වේ.

වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ නම්
$d = |r_1 - r_2|$ විය යුතු අතර
බාහිරව ස්පර්ශ වේ නම් $d = r_1 + r_2$ වේ.

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$



$P_1(x_1, y_1)$ සිට $S = 0$ ට ඇඳි ස්පර්ශකය P_0 හිදී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන්නේ යයි සිතමු.
CP_0 ස්පර්ශකයට ලම්බ වන අතර

$CP_0 = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ වේ.

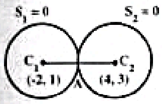
$CP_1 = \sqrt{(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2}$

$CP_1^2 = P_1P_0^2 + CP_0^2$

$= (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$

$\therefore P_1P_0 = \sqrt{x_1^2 + 2gx_1 + g^2 + y_1^2 + 2fy_1 + f^2 - g^2 - f^2 + c}$

$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C}$



$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ හි කේන්ද්‍රය C_1 හා අරය r_1 නම්

$C_1 \equiv (-2, 1)$ $r_1 = \sqrt{4+1+5} = \sqrt{10}$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ හි කේන්ද්‍රය C_2 හා අරය r_2 නම්

$C_2 \equiv (4, 3)$ $r_2 = \sqrt{16+9-15} = \sqrt{10}$

$C_1C_2 = \sqrt{(4+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

දැන් $C_1C_2 = r_1 + r_2$ වන බැවින්

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වේ.

$r_1 = r_2$ වන බැවින් A යනු C_1C_2 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.

$\therefore A \equiv (1, 2)$ වේ.

$P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ යැයි ගනිමු.

P සිට $S_1 = 0$ ට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{x} - 2\bar{y} - 5}$

P සිට $S_2 = 0$ ට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 8\bar{x} - 6\bar{y} + 15}$

$\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{x} - 2\bar{y} - 5} = k\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 8\bar{x} - 6\bar{y} + 15}$ විට

$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{x} - 2\bar{y} - 5 = k^2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 8\bar{x} - 6\bar{y} + 15)$

$(1-k^2)\bar{x}^2 + (1-k^2)\bar{y}^2 + 4(1+2k^2)\bar{x} - 2(1-3k^2)\bar{y} - 5(1+3k^2) = 0$

(i) $k = 1$ විට $12\bar{x} + 4\bar{y} - 20 = 0$

$\therefore k = 1$ විට P හි පථය $3x + y - 5 = 0$ සරල රේඛාව වේ. (1, 2) ලක්ෂ්‍යය මෙම සරල රේඛාව මත පිහිටන අතර එහි අනුක්‍රමණය -3 වේ.

දැන් C_1C_2 හි අනුක්‍රමණය $= \frac{3-1}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$3x + y - 5 = 0$ හා C_1C_2 හි අනුක්‍රමණ ගුණිතය $= -3 \times \frac{1}{3} = -1$ බැවින්

$3x + y - 5 = 0$, C_1C_2 ට ලම්බ වේ.

$\therefore k = 1$ විට P හි පථය වෘත්ත දෙකේ පොදු ස්පර්ශකය වන A හරහා යන සරල රේඛාව වේ.

(ii) $k \neq 1$ විට $1 - k^2 \neq 0$ වේ.

එවිට P හි පථය

$(1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 + 4(1+2k^2)x - 2(1-3k^2)y - 5(1+3k^2) = 0$

මෙය මගින් දැක්වෙන වෘත්තය වේ.

A හි ඛණ්ඩාංක ඉහත සමීකරණයට ආදේශයෙන්

L.H.S. $= (1-k^2) + (1-k^2) \cdot 4 + 4(1+2k^2) - 2(1-3k^2) \times 2 - 5(1+3k^2)$

$= 5 - 5k^2 + 4 + 8k^2 - 4 + 12k^2 - 5 - 15k^2$

$= 0$

A ලක්ෂ්‍යය සමීකරණය තෘප්ත කරන බැවින් $k \neq 1$ විට P හි පථය A හරහා යන වෘත්තයකි.

$k = \frac{1}{2}$ විට වෘත්තයේ සමීකරණය

$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 6x - \frac{1}{2}y - \frac{35}{4} = 0$ වේ

එනම් $x^2 + y^2 + 8x - \frac{2}{3}y - \frac{35}{3} = 0$ මෙය $S_3 = 0$ යැයි ගනිමු.

මෙහි කේන්ද්‍රය C_3 වන අරය r_3 නම්

$C_3 \equiv (-4, \frac{1}{3})$ හා $r_3 = \sqrt{16 + \frac{1}{9} + \frac{35}{3}} = 5\frac{\sqrt{10}}{3}$

දැන් $C_1C_3 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{40}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

$C_1C_3 = \frac{5\sqrt{10}}{3} - \sqrt{10} = r_3 - r_1$

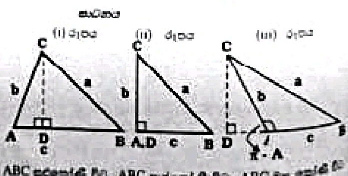
එබැවින් $S_1 = 0$ හා $S_3 = 0$ A හි දී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ

$C_2C_3 = \sqrt{8^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{5\sqrt{10}}{3} + \sqrt{10} = r_3 + r_2$

$\therefore S_3 = 0$ හා $S_2 = 0$ A හිදී බාහිරව ස්පර්ශ වේ

09. (a) ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන් $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ වේ

සාධනය



ABC සුළුකෝණී විට ABC සෘජුකෝණී විට ABC මහ කෝණී විට

ABC සුළුකෝණී විට (i) රූපයෙන්

$BC^2 = CD^2 + DB^2$

$= AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2$

$= AC^2 + AB^2 - 2\,AB\,AD$

$= AC^2 + AB^2 - 2AC.\,AB \cos A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ABC සෘජුකෝණී විට (ii) රූපයෙන්

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

$= AC^2 + AB^2 - 2\,AC.\,AB \cos \pi/2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ABC මහ කෝණී විට (iii) රූපයෙන්

$BC^2 = CD^2 + DB^2$

$= AC^2 - AD^2 + (AB + AD)^2$

$= AC^2 - AD^2 + AB^2 + 2AB\,AD + AD^2$

$= AC^2 + AB^2 + 2AB.\,AC \cos(\pi - A)$

$= AC^2 + AB^2 - 2\,AB\,AC \cos A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$\therefore$ ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් විට

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(i) $2\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right)$

$= 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}\right)$

$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

(ii) $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ නම්

$\frac{a+b+2c}{(a+c)(b+c)} = \frac{3}{a+b+c}$

$(a+b+2c)(a+b+c) = 3(a+c)(b+c)$

$(a+b)^2 + 3c(a+b) + 2c^2 = 3ab + 3ac + 3bc + 3c^2$

$a^2 + b^2 + 2ab + \cancel{3ac} + \cancel{3bc} + 2c^2 = \cancel{3}ab + \cancel{3ac} + \cancel{3bc} + 3c^2$

$a^2 + b^2 - c^2 = ab$

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$

$\cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$

(b) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right]$

$= 2\left[\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right]$

$= 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

$= R\cos(\theta - \alpha)$;

මෙහි $R = 2$ හා $\alpha = \frac{\pi}{6}$ වේ

$\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta = \cos\theta - \sin\theta$

$(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = \cos\theta - \sin\theta$

$(\cos\theta - \sin\theta)(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta - \sin\theta = 0$ හෝ $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$

$\cos\theta = \sin\theta$ හෝ $2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ (ඉහත කොටස අනුව)

$\tan\theta = 1$ හෝ $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ හෝ $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\theta = 2m\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3}$

මෙහි n හා m නිඛිල වේ.

(c) 1 අවස්ථාව $-1 \le x \le 1$ විට

$x > 0$ විට

$\theta = \cos^{-1}x$ යැයි සිතමු.

එවිට $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ වේ.

එවිට $x = \cos\theta$ වන අතර

$-x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$ වේ.

එබැවින් $\cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}x$

2 අවස්ථාව $x < 0$ යැයි සිතමු.

එවිට $x = -y$ ලෙස $y > 0$ වනසේ ලිවිය හැක.

එවිට 1 අවස්ථාව අනුව

$\cos^{-1}(-y) = \pi - \cos^{-1}y$ වේ.

දැන් $-y = x$ ලෙස ආදේශයෙන්

$\cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$ ලැබේ.

3 අවස්ථාව $x = 0$ යැයි සිතමු.

එවිට $\cos^{-1}x = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$ හා

$\cos^{-1}(x) = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$

මෙලෙස $\cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$ වේ.