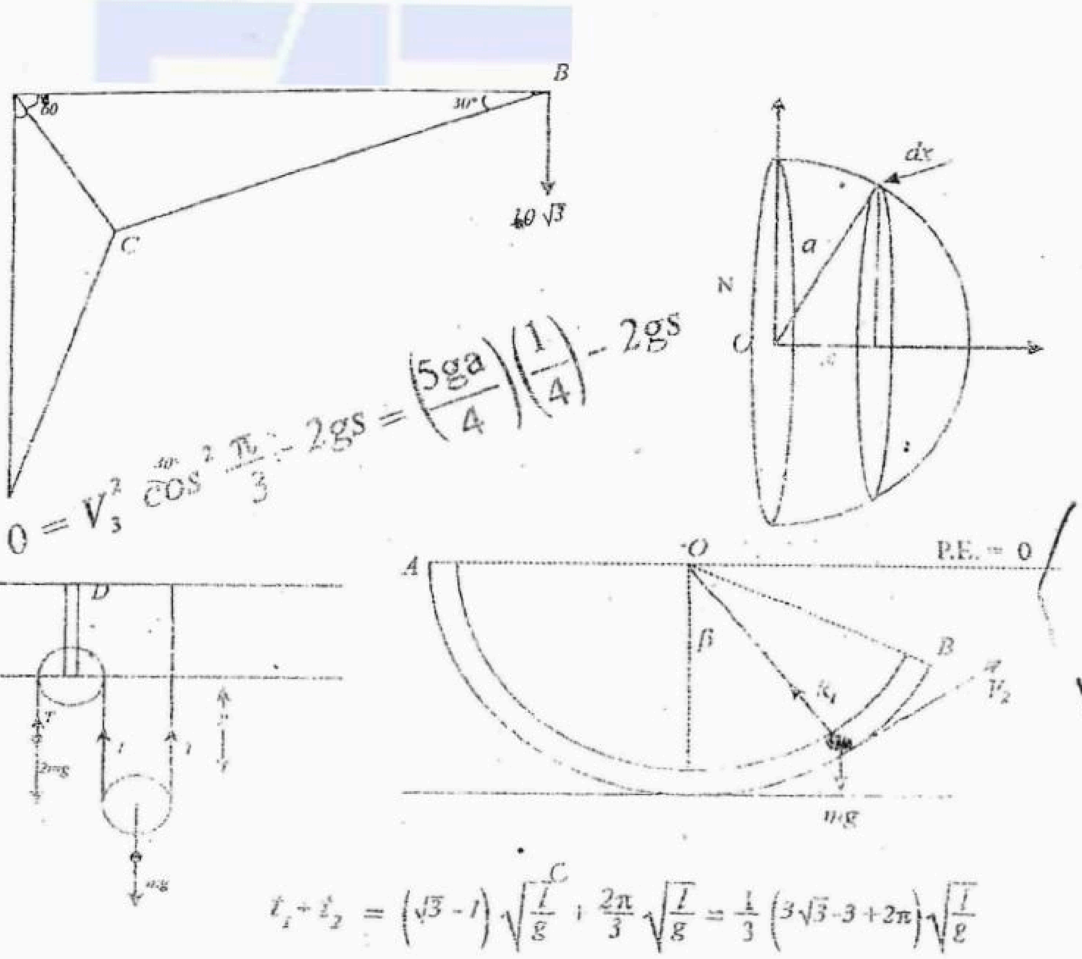
www.AlevelApi.com

නව

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර
(උසස් පෙළ) විභාගය - 2011

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය



10 - සංයුක්ත ගණිතය - I

මෙය උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි. ප්‍රධාන පරීක්ෂක සාකච්ඡා පැවැත්වෙන අවස්ථාවේ දී ඉදිරිපත් වන අදහස් අනුව මෙහි ඇතැම් වෙනස්කම් කරනු ලැබේ. මෙය පන්ති කාමර ඉගැන්වීම ක්‍රියාවලිය සඳහා ආධාරකයක් ලෙස යොදා ගත හැකිය යනු අපගේ විශ්වාසයයි.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

අ. පො. ස (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 2011

සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණුදීමේ පටිපාටිය

A කොටස

(1.) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා n^3+5n යන්න 3 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

$P(n) = n^3 + 5n$ යැයි ගනිමු.

$n = 1$ විට, $P(1) = 1 + 5 = 6$ බැවින් එය 3 න් බෙදේ. (05)

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n = 1$ ට සත්‍ය වේ.

$n = k$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $P(k) = k^3 + 5k$ යන්න 3 න් බෙදේ යැයි උපකල්පනය කරමු. (05)

$n = k + 1$ යැයි ගනිමු.

එවිට $P(k+1) = (k+1)^3 + 5(k+1)$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$ (05)

$= k^3 + 5k + 3(k^2 + k + 2)$; $k^3 + 5k$ යන්න 3 න් බෙදෙන බැවින් මෙය 3 න් බෙදේ (5)

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n = k + 1$ ට සත්‍ය වේ.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සෑම $n \in Z^+$ සඳහා $n^3 + 5n$ යන්න 3 න් බෙදේ.
(05)

[25]

(2.) 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක යොදාගෙන 2000 හා 4000 අතර සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක්, සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනයට (i) ඉඩ නැති විට, (ii) ඉඩ ඇති විට, සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.

(5)

(i) පළමු සංඛ්‍යාංකය තෝරා ගත හැකි ආකාර 2 ක් ඇති අතර අනෙක් සංඛ්‍යාංක තුන තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $3 \times 2 \times 1 = 6$ ක් වේ. (05)
එබැවින්, 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනය රහිතව යොදාගෙන, 2000 හා 4000 අතර සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $2 \times 6 = 12$ ක් වේ. (05)

(ii) පළමු සංඛ්‍යාංකය තෝරා ගත හැකි ආකාර 2 ක් ඇති අතර අනෙක් සංඛ්‍යාංක තුන තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $4 \times 4 \times 4 = 64$ ක් වේ. (5)
එබැවින්, 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනය සහිතව යොදාගෙන, 2000 හා 4000 අතර සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $2 \times 64 = 128$ ක් වේ. (05)

[25]

(3.) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය යොදාගනිමින්, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6+\left(1-\sqrt{3}\right)^6=416$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය කොටස සොයන්න.

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^6={}^6C_0+{}^6C_1\sqrt{3}+{}^6C_2\left(\sqrt{3}\right)^2+{}^6C_3\left(\sqrt{3}\right)^3+{}^6C_4\left(\sqrt{3}\right)^4+{}^6C_5\left(\sqrt{3}\right)^5+{}^6C_6\left(\sqrt{3}\right)^6 \quad (05)$$

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^6={}^6C_0-{}^6C_1\sqrt{3}+{}^6C_2\left(\sqrt{3}\right)^2-{}^6C_3\left(\sqrt{3}\right)^3+{}^6C_4\left(\sqrt{3}\right)^4-{}^6C_5\left(\sqrt{3}\right)^5+{}^6C_6\left(\sqrt{3}\right)^6 \quad (05)$$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^6+\left(1-\sqrt{3}\right)^6=2\left\{{}^6C_0+{}^6C_2\left(\sqrt{3}\right)^2+{}^6C_4\left(\sqrt{3}\right)^4+{}^6C_6\left(\sqrt{3}\right)^6\right\}$$

$$=2\{1+15\times 3+15\times 9+27\} \quad (05)$$

$$=2\{1+180+27\}=416 \quad (05)$$

[20]

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^6=416-\left(1-\sqrt{3}\right)^6$$

$$0<\left(1-\sqrt{3}\right)^6<1 \quad \because 0<\sqrt{3}-1<1$$

එබැවින්, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ හි නිඛිල කොටස 415 වේ. (05)

[05]

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(4.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3\sin x}-\sqrt{4-3\sin x}}{2x}=\dfrac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3\sin x}-\sqrt{4-3\sin x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3\sin x}-\sqrt{4-3\sin x}}{2x}\times\frac{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}\ \textcircled{05}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+3\sin x-(4-3\sin x)}{2x}\times\frac{1}{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}\ \textcircled{05}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}=(3\times 1)\times\left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}\right)=\frac{3}{4}$$

(05) (05) (05) [25]

(5.) $\dfrac{d}{dx}\left\{e^{2x}(A\sin 3x+B\cos 3x)\right\}=13e^{2x}\sin 3x$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ සොයන්න.

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{2x}(A\sin 3x+B\cos 3x)\right\}$$

$$=e^{2x}(3A\cos 3x-3B\sin 3x)+2e^{2x}(A\sin 3x+B\cos 3x)\ \textcircled{05}$$

$$=e^{2x}\{(3A+2B)\cos 3x+(2A-3B)\sin 3x\}$$

$=13e^{2x}\sin 3x$ වන්නේ $3A+2B=0$ හා $2A-3B=13$ එනම්, $A=2$ හා $B=-3$ නම් හා එසේනම් ම පමණි. (05) [15]

ඒ නයින්, $\int e^{2x}\sin 3x\,dx=e^{2x}\left(\dfrac{2}{13}\sin 3x-\dfrac{3}{13}\cos 3x\right)+C$; මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

not necessary

(05) (05) [10]

(6.) $3y+2x+5=0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර වූ ද, $(2,3)$ හා $(-1,2)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව $3:2$ අනුපාතයට බාහිරව බෙදන ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන්නා වූ ද සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

අවශ්‍ය සරල රේඛාව $3y+2x+5=0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර බැවින් අවශ්‍ය සරල රේඛාවේ සමීකරණය $3y+2x+c=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය; මෙහි c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

(05)

(x_0, y_0) යනු $(2, 3)$ හා $(-1, 2)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව $3:2$ අනුපාතයට බාහිරව බෙදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක යැයි ගනිමු.

එවිට, $x_0=\dfrac{2\times 2+(-3)\times(-1)}{-3+2}=-7$ හා $y_0=\dfrac{2\times(3)+(-3)\times(2)}{-3+2}=0$ වේ.

(05) (05)

$(-7,0)$ ලක්ෂ්‍යය රේඛාව මත පිහිටන බැවින් $3(0)+2(-7)+c=0$ වන අතර එයින් $c=14$ ලැබේ. (05)

එබැවින්, අවශ්‍ය සරල රේඛාවේ සමීකරණය $3y+2x+14=0$ වේ. (05) [25]

(7.) වක්‍රයක් $x=3t,\ y=\dfrac{3}{t}$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි t යනු නිශ්-ශුන්‍ය පරාමිතියකි. වක්‍රයට, $\left(3t, \dfrac{3}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $x+t^2y=6t$ බව පෙන්වන්න.

t විචලනය වන විට, ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හා මෙම ස්පර්ශකය මගින් සපරිච්ඡන්න ත්‍රිකෝණාකාර පෙදෙසේ වර්ගඵලය නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{3}{t^2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{t^2}$. (05)

(5)

ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{\left(y - \frac{3}{t}\right)}{(x - 3t)} = -\frac{1}{t^2}$ වේ. (05)

i.e. $x + t^2 y = 6t$. [15]

මෙම ස්පර්ශකය x-අක්ෂය $A = \left(0, \frac{6}{t}\right)$ හි දී ද, y-අක්ෂය $B = (6t, 0)$ හි දී ද කපයි. (05)

OAB ත්‍රිකෝණයේ වර්ග පලය $\frac{1}{2} \times 6t \times \left(\frac{6}{t}\right) = 18$ sq. unit වන අතර එය t වලින් ස්වායත්ත වේ. (05) [10]

(8.) $x + y + 1 = 0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද, කේන්ද්‍ර y-අක්ෂය මත පිහිටියා වූ ද, එක එකක අරය $\sqrt{2}$ වූ ද වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

වෘත්ත එක එකක කේන්ද්‍රය $(0, b)$ ආකාරයේ වේ. (05)

$(0, b)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x + y + 1 = 0$ රේඛාවට ලම්බ දුර $\left|\frac{b+1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}$ වේ. (05)

$\Rightarrow (b+1)^2 = 4 \Rightarrow b^2 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1$ හා -3 වේ. (05)

එබැවින්, වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ $x^2 + (y-1)^2 = 2$ හා $x^2 + (y+3)^2 = 2$ වේ.

(05) (05) [25]

(9.) P ලක්ෂ්‍යයක සිට $x^2 + y^2 - 12x = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග, P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග මෙන් දෙගුණයකි. P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$P = (\alpha, \beta)$ යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 - 12x + y^2 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $\sqrt{\alpha^2 - 12\alpha + \beta^2}$ වේ.

(05)

P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 9}$ වේ. (05)

$\alpha^2 - 12\alpha + \beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 - 9)$. (05)

i.e. $3\alpha^2 + 3\beta^2 + 12\alpha - 36 = 0$.

i.e. $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha - 12 = 0$. (05)

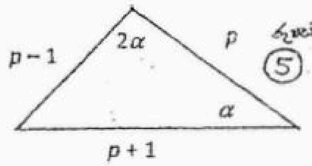
එබැවින්, P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටයි. (05) [25]

(10.) ත්‍රිකෝණයක පාද $p-1$, p හා $p+1$ වෙයි; මෙහි p යනු $p > 1$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි. ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය, කුඩාතම කෝණය මෙන් දෙගුණයක් නම්, සයින් නියමය හා කෝසයින් නියමය යොදාගනිමින් p හි අගය සොයන්න.

සයින් නීතිය යෙදීමෙන්

$\frac{\sin\alpha}{p-1} = \frac{\sin 2\alpha}{p+1} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{p+1}{2(p-1)}$ ලැබේ.

(05) (05)



(5)

කෝසයින් නීතිය යෙදීමෙන්

$\cos\alpha = \frac{(p+1)^2 + p^2 - (p-1)^2}{2p(p+1)} = \frac{p+4}{2(p+1)}$ ලැබේ.

(05)

එබැවින්, $\frac{p+1}{2(p-1)} = \frac{p+4}{2(p+1)} \Rightarrow p^2 + 2p + 1 = p^2 + 3p - 4 \Rightarrow p = 5$ ලැබේ. (05) [25]

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

B	B කොටස	B

(11) (a) α හා β යනු $ax^2+bx+c=0$, වර්ගජ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු; මෙහි a, b හා c යනු තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.

α හා β දෙකම

(i) $b^2-4ac \ge 0$ ම නම් පමණක් තාත්වික,

(ii) $b=0$ හා $ac>0$ ම නම් පමණක් ශුද්ධ අතාත්වික

බව පෙන්වන්න.

මූල α^2 හා β^2 වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

එක්කෝ α හා β දෙකම තාත්වික, **නැත්නම්** α හා β දෙකම ශුද්ධ අතාත්වික, ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙකම තාත්වික බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x) = x^3-3abx-(a^3+b^3)$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු තාත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x-a-b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අනෙක් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, a හා b ප්‍රභින්න නම්, $f(x)=0$ ට තාත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

$x^3-9x-12=0$ ට තාත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව අපෝහනය කර, එය සොයන්න.

(a) (i) $ax^2+bx+c = a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \rightarrow (1)$ ම නම් පමණක් $ax^2+bx+c=0$ වේ. $\Leftrightarrow$ (10)

$b^2-4ac \ge 0$ ම නම් පමණක් (1) සමීකරණය සපුරාලනයේ x ට තාත්වික අගයන් දෙකක් ඇත. (05)

අන්‍යාකාර. [එනම්, $b^2-4ac \ge 0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (දෙකම තාත්වික) වේ.]

එනම්, $b^2-4ac \ge 0$ ම නම් පමණක් $ax^2+bx+c=0$ ට තාත්වික මූල ඇත. (05) [20]

(ii) $b^2-4ac<0$ ම නම් පමණක් (1) සමීකරණය සපුරාලනයේ x ට සංකීර්ණ අගයන් දෙකක් ඇත. (05)

එනම්, $b^2-4ac<0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ (දෙකම සංකීර්ණ) වේ.

$b^2-4ac<0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$ (දෙකම ශුද්ධ අතාත්වික) වේ. (05)

එනම්, $ac>0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$ (දෙකම ශුද්ධ අතාත්වික) වේ. (05)

එනම්, $ac>0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $ax^2+bx+c=0$ ට ශුද්ධ අතාත්වික මූල ඇත. (05) [20]

(a) (i) සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්:

α හා β යනු $ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල බැවින් $\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \rightarrow (1)$ හා

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ වේ. (05)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(-\dfrac{b}{c}\right)^2 - 4\left(\dfrac{c}{a}\right) = \dfrac{b^2-4ac}{a^2}$ (05)

තාත්වික

$b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් $\alpha - \beta = \pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \rightarrow$ (2) වේ. (05)

$ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ හා $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ බව

(1) හා (2) න් ගම්‍ය වන අතර දෙකම තාත්වික වේ. (05)

$b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් මූල තාත්වික වේ. **20**

(a) (ii) සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්:

හුදෙක් අතාත්වික

$b^2 - 4ac < 0$ ම නම් පමණක් $\alpha - \beta = \pm\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{a}i \rightarrow$ (3) වේ. (05)

$ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක $\dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ හා $\dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ බව (1) හා (3) න් ගම්‍ය වන අතර දෙකම සංකීර්ණ වේ. (05)

$b=0$ නම්, ඒවා එක එකක තාත්වික කොටස ශුන්‍ය වන අතර ඒවා දෙකම හුදෙක් අතාත්වික වේ. (05)

එනම්, $ac > 0$ හා $b = 0$ ම නම් පමණක් මූල දෙකම හුදෙක් අතාත්වික (05) **20**

α^2 හා β^2 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $x^2 - (\alpha^2+\beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$ ලෙස ලිවිය හැකිය. (05)

එනම්, $x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha^2\beta^2 = 0$

එනම්, $x^2 - \left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\dfrac{c}{a}\right)\right\}x + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = 0$ (05)

එනම්, $a^2x^2 - (b^2-2ac)x + c^2 = 0$. (05) **15**

$\Delta = \{-(b^2-2ac)\}^2 - 4a^2c^2 \geq 0$ ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙකම තාත්වික වේ. (05)

එනම්, $\{(b^2-2ac)-2ac\}\{(b^2-2ac)+2ac\} \geq 0$ ම නම් පමණක් මූල දෙකම තාත්වික වේ.

එනම්, $b^2(b^2-4ac) \geq 0$ ම නම් පමණක් මූල දෙකම තාත්වික වේ. (05)

එක්කෝ $(b^2-4ac) \geq 0$ හා b ඕනෑම තාත්වික අගයක් ම නම් පමණක් නැත්නම් $b^2-4ac<0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $b^2(b^2-4ac) \geq 0$ වේ. (10)

එනම්, එක්කෝ α හා β දෙකම තාත්වික නැත්නම් α හා β දෙකම හුදෙක් අතාත්වික ම නම් පමණක් $b^2(b^2-4ac) \geq 0$ වේ. (05)

ඒ තයින් ප්‍රතිඵලය ලැබේ. **25**

වෙනත් ක්‍රමයක්:

α හා β යනු $ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

එබැවින්, α හා β දෙකම

(i) $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්වික, (05)

(ii) $ac > 0$ හා $b = 0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්වික, (05)

A level අපි — උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ හා $b \neq 0$ ම නම් පමණක් සංකීර්ණ (05) වේ.

α හා β දෙකම සංකීර්ණ නම් α^2 හා β^2 දෙකම තාත්ත්වික විය නොහැකිය. (05)

α හා β දෙකම තාත්ත්වික හෝ දෙකම ශුද්ධ අතාත්ත්වික ම නම් පමණක් α^2 හා β^2 දෙකම තාත්ත්වික වේ. (05) **25**

(b) $f(a+b) = (a+b)^3 - 3ab(a+b) - (a^3+b^3) = 0$. (05)

එබැවින්, $(x-a-b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. **05**

$$f(x) = x^3 - 3abx - (a^3+b^3) = (x-a-b)(x^2 + (a+b)x + a^2 - ab + b^2$$

(05) (05) (05) **15**

$$f(x) = (x-a-b)\{x^2 + (a+b)x - 3ab + (a+b)^2\}$$

$f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙයි නම්

$x^2 + (a+b)x - 3ab + (a+b)^2 = 0$ ට සංකීර්ණ මූල තිබිය යුතුය. (05)

$x^2 + (a+b)x - 3ab + (a+b)^2 = 0$ ට සංකීර්ණ මූල තිබීම සඳහා

$(a+b)^2 - 4\{(a+b)^2 - 3ab\} < 0$ විය යුතුය. (05)

එනම්, $(a+b)^2 - 4ab > 0$ විය යුතුය.

එනම්, $(a-b)^2 > 0$ විය යුතුය. (05)

එනම්, a හා b ප්‍රභින්න විය යුතුය. (05) **20**

$\Delta = (a+b)^2 - 4(a^2+b^2-ab)$

$= -3(a-b)^2 \qquad \Delta < 0$

$ab = 3$ හා $a^3 + b^3 = 12$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $a^3 + \left(\frac{3}{a}\right)^3 = 12$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $a^6 - 12a^3 + 27 = 0$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ

එනම්, $(a^3-9)(a^3-3) = 0$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $(a^3-9)(a^3-3) = 0$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $a = 3^{\frac{2}{3}}$ හා $b = 3^{\frac{1}{3}}$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

(05) (05) (05)

$a = 3^{\frac{2}{3}}$ හා $b = 3^{\frac{1}{3}}$ නම් $x^3 - 9x - 12 = 0$ යන්න $x^3 - 3abx - (a^3+b^3) = 0$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

$a = 3^{\frac{2}{3}}$ හා $b = 3^{\frac{1}{3}}$ ප්‍රභින්න බැවින් (05) ඉහත ප්‍රතිඵලය අනුව $x^3 - 9x - 12 = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙයි. (05) **25**

එම තාත්ත්වික මූලය $3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ වේ. (05) **05**

---

12. (a) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ යැයි ගනිමු.

r ඇසුරෙන් $\dfrac{u_{r+1}}{u_r}$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $r = 1, 2, 3, \ldots$ සඳහා $(2r-1)u_r - (2r+1)u_{r+1} = 4u_{r+1}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(b) $y = |2x-8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

ඒ නයින්, $y = -|2x-8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

$y = 4-|2x-8|$ හා $y = |2x-10|$ හි ප්‍රස්තාර, එකම රූප සටහනක අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $|2x-10|+|2x-8| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලනු ලබන x හි තාත්ත්වික අගය කුලකය සොයන්න.

(a) $u_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} \Rightarrow u_{r+1} = \dfrac{1}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ (5)

$\dfrac{u_{r+1}}{u_r} = \dfrac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \dfrac{(2r-1)}{(2r+5)}$ (05) [10]

එනම්, $(2r-1)u_r = (2r+5)u_{r+1}$

$= (2r+1)u_{r+1} + 4u_{r+1}$ (05)

එනම්, $(2r-1)u_r - (2r+1)u_{r+1} = 4u_{r+1}$ for $r = 1, 2, 3, \ldots$ [05]

$4u_1 = 5u_1 - u_1$ (05)

$r = 1$ විට, $4u_2 = u_1 - 3u_2$ (05)

$r = 2$ විට, $4u_3 = 3u_2 - 5u_3$ (05)

....

....

....

$r = n-2$ විට, $4u_{n-1} = (2n-5)u_{n-2} - (2n-3)u_{n-1}$ (05)

$r = n-1$ විට, $4u_n = (2n-3)u_{n-1} - (2n-1)u_n$ (05)

$$4\sum_{r=1}^{n} u_r = 5u_1 - (2n-1)u_n = \frac{5}{1.3.5} - \frac{(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

(05) (05)

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$$ (05) [40]

ඔව්, $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. (05) [05]

හේතුව:

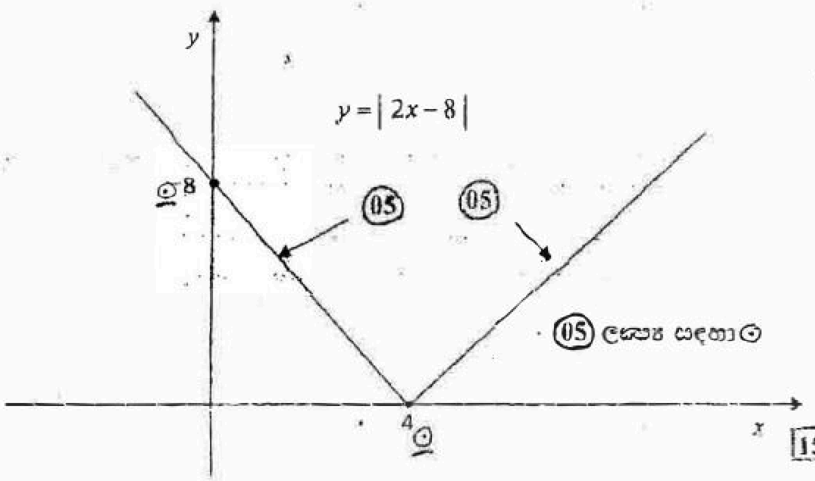
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n-1)(2n+3)}\right\} = \frac{1}{12} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{12}$$ (05)

(05)

n අනන්තය කරා එළැඹෙන විට, ශ්‍රේණියේ පළමු පද n වල ඓක්‍ය පරිමිත සීමාවක් කරා එළැඹෙන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. [10]

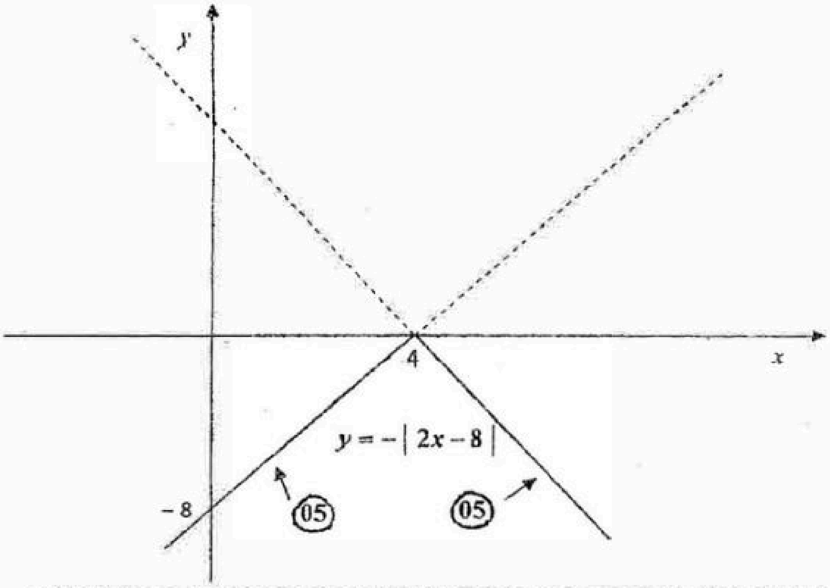
8

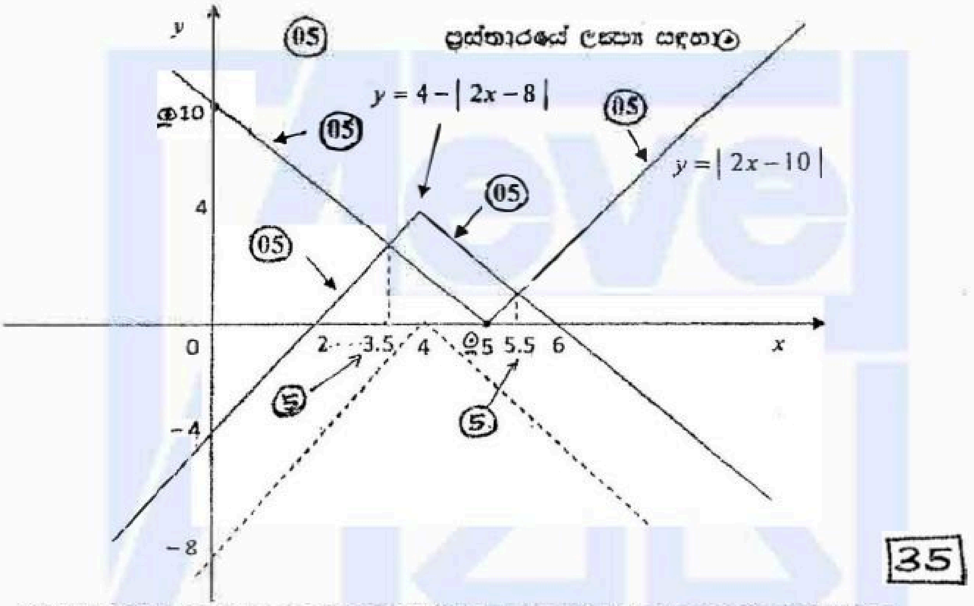
(b)



[15]

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .





$3.5 \le x \le 5.5$ වන විට $y = 4 - | 2x - 8 |$ හි ප්‍රස්තාරය $y = | 2x - 10 |$ හි ප්‍රස්තාරයට ඉහළින් පිහිටන බව ඉහත ප්‍රස්තාර වලින් පැහැදිලි වේ. (10) $\{x \in \mathbb{R}\ x;\ 3.5 \le x \le 5.5\}$

එබැවින්, $3.5 \le x \le 5.5$ වන විට $| 2x - 10 | + | 2x - 8 | \le 4$ වේ. [20]

$\{x \in \mathbb{R}\ x;\ 3.5 \le x \le 5.5\}$ 20

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $A(\lambda A + \mu I) = I$ වන අයුරින් λ හා μ අගයන් සොයන්න ; මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, A^{-1} සොයන්න.

(b) P, Q හා R යනු ආර්ගන් සටහනෙහි පිළිවෙළින් z_0, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු.

$PQ = PR$ ද, θ යනු PQ සිට PR ට වාමාවර්ත ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්

$z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාවර්ත ලෙස ගන්නා ලද A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය ආර්ගන් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙළින් $1 - i$ හා z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z ඇසුරෙන් සොයන්න.

$AC = 2$ වන අයුරින් C විචලනය වෙයි නම්, B හි පථය ආර්ගන් සටහනෙහි සොයන්න.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(a) $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{I}) = \mathbf{I} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\left\{\lambda\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (05)$$

එනම්, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & \lambda \\ -\lambda & 3\lambda + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (10)

එනම්, $\begin{pmatrix} 3\lambda + 2\mu & 5\lambda + \mu \\ -5\lambda - \mu & 8\lambda + 3\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (10)

$3\lambda + 2\mu = 1$, $5\lambda + \mu = 0$ හා $8\lambda + 3\mu = 1 \Rightarrow$ $\lambda = -\frac{1}{7}$ හා $\mu = \frac{5}{7}$ වේ.

(05) (05) (05) (05) **45**

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{I}) = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{I} \quad (05)$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & \lambda \\ -\lambda & 3\lambda + \mu \end{pmatrix} \quad (05)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} + \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} + \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(05) (5) **20**

(b) O ඔස්සේ PQ ට සමාන හා සමාන්තර OQ' රේඛා ඛණ්ඩය අඳින්න. (05)

එවිට ආර්ගන් සටහනෙහි Q' ලක්ෂ්‍යයෙන් $z_1 - z_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ. (05)

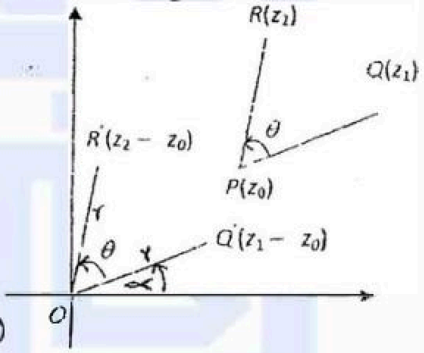
මෙලෙසම, O ඔස්සේ PR ට සමාන හා සමාන්තර OR' රේඛා ඛණ්ඩය අඳින්න.

එවිට ආර්ගන් සටහනෙහි R' ලක්ෂ්‍යයෙන් $z_2 - z_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ. (05)

O වටා θ කෝණයකින් වාමාවර්ත අතට OQ' භ්‍රමණය කිරීමෙන් R' ලක්ෂ්‍යය ලබාගත හැකිය. (05)

එබැවින්, R' ලක්ෂ්‍යයෙන් $(z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ (10) සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ.

ඒ නයින්, $z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ ලැබේ. (5) **35**



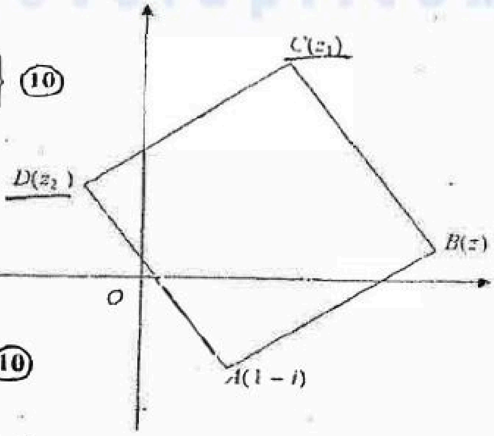
A, B හා D ලක්ෂ්‍ය තුන සලකමු. ඉහත ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්

$$z_2 - (1 - i) = \{z - (1 - i)\}\left\{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right\} \quad (10)$$

ලැබේ.

එනම්, $z_2 = i\{z - (1 - i)\} + 1 - i$

එනම්, $z_2 = iz - 2i = i(z - 2)$ (05)



C, D හා B ලක්ෂ්‍ය තුන සලකමු. ඉහත ප්‍රතිඵලය නැවත යෙදීමෙන්

$$z - z_1 = \{i(z - 2) - z_1\}\left\{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right\} \quad (10)$$

ලැබේ.

එනම්, $z - z_1 = i\{i(z - 2) - z_1\} = -(z - 2) - iz_1$

එනම්, $z_1 = \dfrac{2(z - 1)}{1 - i} = \dfrac{2(z - 1)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = (1 + i)(z - 1)$. (05)

$AC = |z_1 - (1 - i)| = |(1 + i)(z - 1) - (1 - i)| = |(1 + i)z - 2| = |(x - y - 2) + i(x + y)|$

(05) (05)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$AC = 2$ බැවින් $(x-y-2)^2 + (x+y)^2 = 4$ වේ. (05)

එනම්, $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 + x^2 + y^2 = 4$

එනම්, $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

එනම්, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ (05) **[50]**

---

14. (a) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ යැයි සිතමු; මෙහි f' හා f'' ට සුපුරුදු තේරුම් තිබෙයි.

a හා b හි අගයන් සොයන්න.

a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක්, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අඳින්න.

ඒ නයින්, $2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(b) සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත සංවෘත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් තුනී කාඩ්බෝඩ්වලින් සාදා ඇත. පෙට්ටියේ පරිමාව 8192 cm^3 වේ. සමචතුරස්‍රාකාර පතුලෙහි පැත්තක දිග $4x$ cm යැයි ගනිමු. අරය x cm වන වෘත්තාකාර සිදුරක් ඉහළ සමචතුරස්‍රාකාර මුහුණතෙන් කපා ඉවත් කර ඇත. සිදුර සහිත පෙට්ටියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $A \text{ cm}^2$ යන්න. $A = (32-\pi)x^2 + \frac{8192}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ වන විට A අවම වන බව පෙන්වන්න.

(a) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ (05) හා $f''(x) = 12x + 2a$ වේ. (05)

$f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ බැවින්, $6a + b = -42$

$54 + 6a + b = 12$ (05) හා $36 + 2a = 18$ (05) ලැබේ. $2a = -18$

එබැවින්, $a = -9$ (05) හා $b = 12$ වේ (05) **[30]**

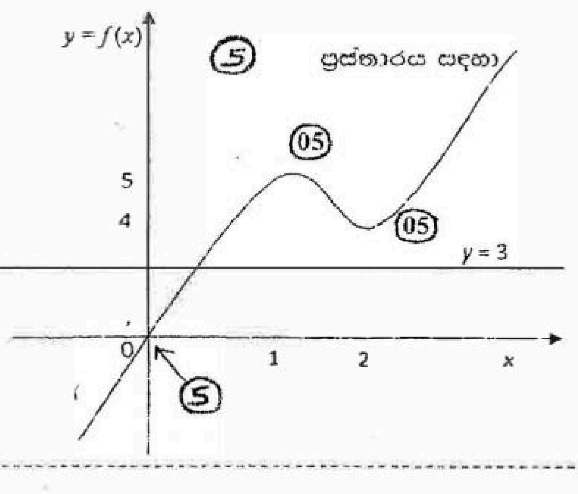
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ වන අතර

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1$ හා $x = 2$ වේ. $x=1$, $x=2$

(05) (05)

	$x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(−)	(+)
	$f(x)$ වැඩි වේ. (5)	$f(x)$ අඩු වේ. (5)	$f(x)$ වැඩි වේ. (5)

$f(0) = 0$, $f(1) = 5$ හා $f(2) = 4$ වේ.



[45]

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$2x^2 + ax + b = \frac{3}{x} \Leftrightarrow f(x) = 3$. (05)

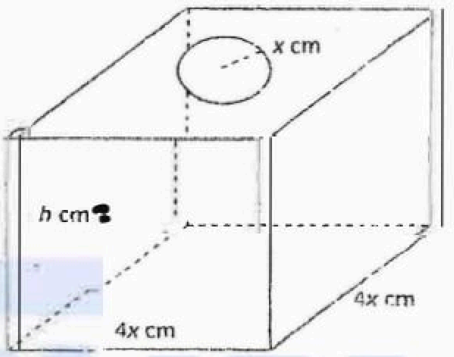
$2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$ හි විසඳුම් ගණන, $y = f(x)$ වක්‍රයේ හා $y = 3$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගණන වේ. (05) → (ප්‍රස්තාරයේ $y = 3$ ඇඳ තිබිය යුතුය.)

ඉහත ප්‍රස්තාරයට අනුව ඡේදන ලක්ෂ්‍ය එකක් පමණක් ඇති බැවින් අවශ්‍ය පිළිතුර 1 වේ. (05) [15]

(b) පෙට්ටියේ උස h cm යැයි ගනිමු.

$A = (2 \times 16x^2 + 4 \times 4xh) - \pi x^2$ (10)

පෙට්ටියේ පරිමාව වන $16x^2h$ යන්න 8192 ට සමාන වේ (5)



$16x^2 h = 8192 \Rightarrow 16h = \frac{8192}{x^2}$ (05) (5)

$A = (32 - \pi)x^2 + \frac{8192}{x}$. (05)

[30]

$\frac{dA}{dx} = 2(32 - \pi)x - \frac{8192}{x^2}$. (05)

$\therefore \frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{4096}{(32 - \pi)} = \frac{(16)^3}{(32 - \pi)} \Leftrightarrow x = \frac{16}{\sqrt[3]{(32 - \pi)}}$.

(05) (05) (05)

$x < \frac{16}{\sqrt[3]{(32 - \pi)}}$ විට $\frac{dA}{dx} < 0$ වන අතර $x > \frac{16}{\sqrt[3]{(32 - \pi)}}$ විට $\frac{dA}{dx} > 0$ වේ. (15)

එබැවින්, $x = \frac{16}{\sqrt[3]{(32 - \pi)}}$ විට A අවම වේ. (05) [30]

---

15. (a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx$ අගයන්න.

(b) $t = \tan x$ යැයි ගනිමු.

$\cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$ හා $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5} dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(c) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න.

ඉහත සමීකරණයේ x, a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින්, $\frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ලියා දක්වා, ඒ නයින්, $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$ සොයන්න.

A level ඇපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(a) $\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ln x\,dx = \int_1^e \ln x\, d\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)dx$ (10)

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\ln x\right]_1^e - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)dx \quad (5)\ (5)$$

$$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx \quad \because \ln e = 1 \text{ හා } \ln 1 = 0 \quad (5)$$

$$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)^2\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_1^e \quad (05)$$

$$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 e^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \quad (05) \quad = \frac{6}{25}e^{5/2} + \frac{4}{25}$$

35

(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. (05)

$\sin 2x = 2\cos x \sin x = \dfrac{2\cos x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{2t}{1+t^2}$. (05)

$t = \tan x \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$

එබැවින්, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ වේ. (05)

15

---

(5) සීමා වලට (5) ආදේශයෙන් t වලින්

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4(1-t^2)+6t+5}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2+6t+9}\,dt \quad (5)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(t+3)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{(t+3)}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

(05) (05) (05)

30

(c) $A = \dfrac{1}{a-b}$ හා $B = \dfrac{1}{b-a}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $x \in \Re - \{a, b\}$ සඳහා

$\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} = \dfrac{1}{a-b}\left\{\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b}\right\} = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ වේ. (05)

10

එබැවින්, $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{1}{(a-b)}\dfrac{1}{(x-a)} - \dfrac{1}{(a-b)}\dfrac{1}{(x-b)} \rightarrow (1)$ වේ. (05)

---

(1) හි x, a හා b පිළිවෙළින් x^2, $-a^2$ හා $-b^2$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන් (5) (5) (5)

$\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \dfrac{1}{(-a^2+b^2)}\dfrac{1}{(x^2+a^2)} - \dfrac{1}{(-a^2+b^2)}\dfrac{1}{(x^2+b^2)}$ ලැබේ. (10)

$\therefore \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{(b^2-a^2)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)}\,dx - \frac{1}{(b^2-a^2)}\int \frac{1}{(x^2+b^2)}\,dx$ (05)

$$= \frac{1}{(b^2-a^2)}\left\{\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right\} + C,\ a, b \neq 0 \text{ නම}$$

(10) (10) (5)

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

A level ඇපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$a = 0$ නම් $b \neq 0$ වේ.

$$\therefore \int \frac{1}{x^2(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{(x^2+b^2)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{b^2 x} - \frac{1}{b^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + C''$$ මෙහි C' යනු අභිමත නියතයකි.

(5)

If $b = 0$ then $a \neq 0$.

$$\therefore \int \frac{1}{x^2(x^2+b^2)}\,dx = -\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)}\,dx + \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{a^2 x} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C'''$$ මෙහි C'' යනු අභිමත නියතයකි.

[60]

---

(16) (a) $lx+my+1=0$ සරල රේඛාව සමඟ සමද්විපාද ඍජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් සාදන ලෙස මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ එකිනෙකට ලම්බව යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ $(l-m)x+(l+m)y=0$ හා $(l+m)x-(l-m)y=0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $S' \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ වෘත්තය, $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ වෘත්තය, $S=0$ වෘත්තයෙහි විෂ්කම්භයක කෙළවරවලදී ඡේදනය කරයි නම්, $2g^2+2f^2-c=2gg'+2ff'-c'$ බව පෙන්වන්න.

විචල්‍ය වෘත්තයක්, $S_1 \equiv x^2+y^2-25=0$ හා $S_2 \equiv x^2+y^2-2x-4y-11=0$ වෘත්ත, එක එකක විෂ්කම්භයක කෙළවරවලදී ඒවා ඡේදනය කරයි. විචල්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x+2y+2=0$ සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(a) මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාවක සමීකරණය $y=kx$ ලෙස ලිවිය හැකිය (05)

මෙම රේඛාව $lx+my+1=0$ රේඛාව ඡේදනය කරයි නම් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x ඛණ්ඩාංකය

$lx+m(kx)+1=0$ සපුරාලන අතර එයින් $x=-\dfrac{1}{l+mk}$ ලැබේ. (5)

$y=kx$ රේඛාවේ හා $lx+my+1=0$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$\left(-\dfrac{1}{l+mk},\ -\dfrac{k}{l+mk}\right)$ වේ. (05) + (5)

මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට මෙම ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{l+mk}\right)^2 + \left(-\frac{k}{l+mk}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{|l+mk|}$$ වේ.

(05) (05)

$k \rightarrow -\frac{1}{k}$ ට

$\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{|l+mk|}$ හි k, $-\dfrac{1}{k}$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන් (05) මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට $y=kx$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බකයේ හා $lx+my+1=0$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර

$$\frac{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}}{\left|l+m\left(-\frac{1}{k}\right)\right|}$$ ලෙස ලැබේ. (05)

එනම්, $\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{|kl-m|}$ වේ. (05)

සාදන ලද ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද බැවින් $\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{|l+mk|} = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{|kl-m|}$ වේ. (10)

එබැවින්, $k=\dfrac{l+m}{l-m}$ ලැබේ. (05)

$\therefore\ -\dfrac{1}{k} = \dfrac{l-m}{l+m}$ (05)

සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ $(l-m)x+(l+m)y=0$ හා $(l+m)x-(l-m)y=0$ වේ.

(05) (05) [75]

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(b) $S = 0$ හා $S' = 0$ වෘත්ත දෙකට ඇඳි ජ්‍යායේ සමීකරණය

$2(g - g')x + 2(f - f')y + c - c' = 0$ වේ. (10)

$S' = 0$ වෘත්තය, $S = 0$ වෘත්තය $S = 0$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක අන්ත වලදී කපන බැවින

$S = 0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන $(-g, -f)$

$2(g - g')x + 2(f - f')y + c - c' = 0$ රේඛාව මත පිහිටිය යුතුය. (05)

එබැවින්, $2(g - g')(-g) + 2(f - f')(-f) + c - c' = 0$ ලැබේ. (05)

එනම්, $2g^2 + 2f^2 - c = 2gg' + 2ff' - c'$ වේ. (05) [25]

විචල්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යැයි ගනිමු. (05)

$S = 0$ වෘත්තය, $S_1 = 0$ වෘත්තය $S_1 = 0$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක අන්ත වලදී කපන බැවින් $-(-25) = -c \Rightarrow c = -25$ විය යුතුය.

(10) (05)

$S = 0$ වෘත්තය, $S_2 = 0$ වෘත්තය $S_2 = 0$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක අන්ත වලදී කපන බැවින් $2(-1)^2 + 2(-2)^2 - (-11) = -2g + 2(-2)f - c$ විය යුතුය. (10)

එනම්, $2g + 4f = -c - 21$ වේ. (05)

c සඳහා ආදේශයෙන් $g + 2f = 2$ ලැබේ. (05)

$-g + 2(-f) = -2$ (05)

එබැවින්, විචල්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන $(-g, -f)$ $x + 2y + 2 = 0$ රේඛාව මත පිහිටියි.

(05) [50]

---

17. (a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය ප්‍රයෝජනයට ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

$\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

(i) $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^3 = 1$. (05)

එනම්, $\cos^6\theta + 3\cos^4\theta\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\sin^4\theta + \sin^6\theta = 1$ (10) වේ.

එනම්, $\cos^6\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^6\theta = 1$ වේ.

එනම්, $\cos^6\theta + \dfrac{3}{4}(2\cos\theta\sin\theta)^2 + \sin^6\theta = 1$ (05) වේ.

එනම්, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - \dfrac{3}{8}(2\sin^2 2\theta)$ (05) වේ.

එනම්, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - \dfrac{3}{8}(1 - \cos 4\theta)$ වේ.

එනම්, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4\theta$ (05) වේ.

එබැවින්, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වේ; මෙහි $a = \dfrac{5}{8}$ හා $b = \dfrac{3}{8}$ වේ.

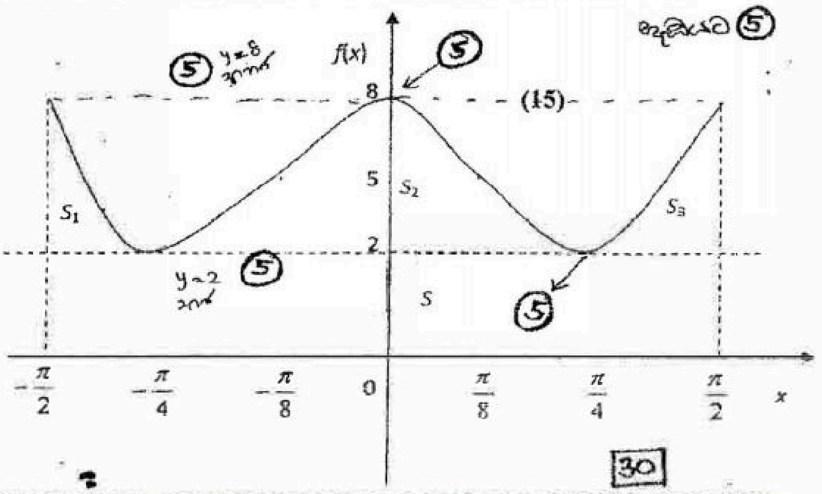
(05) (05) [40]

(i) $f(x) = 8(\sin^6 x + \cos^6 x) = 8\left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x\right) = 5 + 3\cos 4x$ (05)

$|x| \le \dfrac{\pi}{2}$ පරාසය තුළ $f(x) = 8(\sin^6 x + \cos^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරය ඇඳීමත්, $|x| \le \dfrac{\pi}{2}$ පරාසය තුළ $f(x) = 5 + 3\cos 4x$ හි ප්‍රස්තාරය ඇඳීමත් එකම වේ.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$5+3\cos 4x$	8	2	5	8	5	2	8



(ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$

$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ බැවින්

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$ (05) වේ.

එනම්, $3\cos 4x - 4\sin 4x = 5$ වේ.

එනම්, $\frac{3}{5}\cos 4x - \frac{4}{5}\sin 4x = 1$ (05) වේ.

එනම්, $\cos\alpha\cos 4x - \sin\alpha\sin 4x = 1$ වේ; මෙහි $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ වේ.

(05)

එනම්, $\cos(4x+\alpha) = 1$ (05) වේ.

$\Rightarrow 4x + \alpha = 2n\pi, \quad n \in Z$ (05) වේ.

එනම්, $x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}, \quad n \in Z$ වේ. (5)

30

(b) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ හා $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ යැයි ගනිමු. (05)

එවිට, $\tan\alpha = \frac{x-1}{x-2}$; $\tan\beta = \frac{x+1}{x+2}$ හා $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ වේ. (05)

(5)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 1$ (05)

නමුත් $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ (05)

$$= \frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \quad (05)$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2)}{(x^2-4) - (x^2-1)} = \frac{2x^2-4}{-3} \quad (5)$$

එබැවින්, $\frac{2x^2-4}{-3} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ලැබේ. (05)

(05) (05)

50

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .