WWW.ALEVELAPI.COM

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2015

10 - සංයුක්ත ගණිතය - I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

www.alevelapi.com

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතු ව ඇත.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2015

10 - සංයුක්ත ගණිතය

ලකුණු බෙදී යාම

I පත්‍රය :

A කොටස	:	10 x 25	=	250
B කොටස	:	05 x 150	=	750
එකතුව			=	1000 / 10
I පත්‍රය -		අවසාන ලකුණු	=	100

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $8^n - 3^n$ යන්න 5 හි ධන නිඛිල ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ නම් $8^n - 3^n = 8-3=5$. $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

$n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

$\Rightarrow 8^p - 3^p = 5m$, මෙහි m ධන නිඛිලයකි. (5)

$n=p+1$ සලකමු. $\quad 8^{p+1} - 3^{p+1} = 8^p(5+3) - 3^{p+1}$

$= (5m+3^p)(5+3) - 3^{p+1}$ (5)

$= 8\times 5m + 5\times 3^p + 3^{p+1} - 3^{p+1}$

$= 5(8m+3^p)$ (5) $\quad 8m+3^p \in \mathbb{Z}^+$

එනයින් $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=p+1$ සඳහාද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

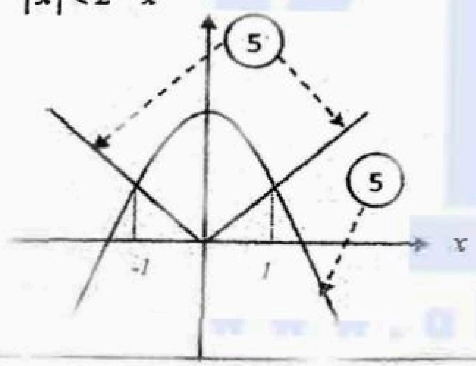
එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලුම $n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

---

2. $|x| < 2 - x^2$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

$|x| < 2 - x^2$



$x\geq 0$ සඳහා	$x<0$ සඳහා
$x = 2 - x^2$	$-x = 2 - x^2$
$x^2 + x - 2 = 0$	$x^2 - x - 2 = 0$
$(x+2)(x-1) = 0$	$(x-2)(x+1) = 0$
$\Rightarrow x = 1$ (5)	$\Rightarrow x = -1$ (5)

$\therefore$ විසඳුම: $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$x\geq 0$ සඳහා	$x<0$ සඳහා
$x < 2 - x^2$ (5)	$-x < 2 - x^2$ (5)
$x^2 + x - 2 < 0$	$x^2 - x - 2 < 0$
$(x-1)(x+2) < 0$	$(x+1)(x-2) < 0$
$\Rightarrow 0 \leq x < 1$ (5)	$\Rightarrow -1 < x < 0$ (5)

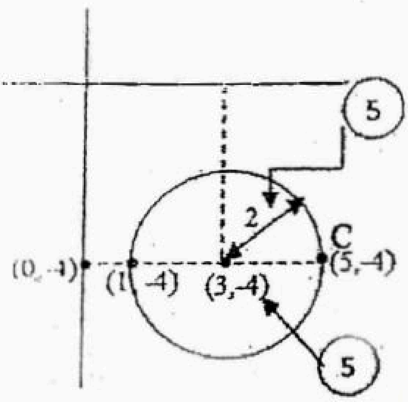
විසඳුම: $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

3. ආගන්ඩ් සටහනක් මත $|z - 3 + 4i| = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයෙහි පථය වන C හි දළ සටහනක් අඳින්න. එනයින්, C මත පිහිටි z සඳහා $|z + 4i|$ හි වැඩිතම හා අඩුතම අගයන් සොයන්න.

C යනු කේන්ද්‍රය $(3, -4)$ වූද අරය 2 ක් වූද වෘත්තයකි. (5)



$$|z - 3 + 4i| = 2$$
$$|z - (3 - 4i)| = 2$$

$$|z + 4i| = |z - (-4i)|$$

C මත z සඳහා $|z + 4i|$ හි වැඩිතම අගය 5 යි, (5)

$|z + 4i|$ හි අඩුතම අගය 1යි. (5)

25

---

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ හා $n \geq 5$ යැයි ගනිමු. $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{n-10} හි සංගුණකය 100 ට වඩා අඩු වේ. n හි අගය සොයන්න.

$$\left(3x + \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (3x)^{n-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r 3^{n-r} 2^r x^{n-2r} \quad (5)$$

$n - 10 = n - 2r \Rightarrow r = 5$ (5)

එම නිසා, x^{n-10} හි සංගුණකය $= {}^nC_5 3^{n-5} 2^5$

${}^nC_5 3^{n-5} \times 32 < 100 \Rightarrow 3^{n-5} < \frac{100}{32}, \because {}^nC_5 > 1$ (5)

$n \geq 5$ බව දී ඇත. $n = 5$ හෝ $n = 6$ වලංගු අගයන් වේ.

$n = 5 \qquad 3^0 < \frac{100}{32}$ වලංගුවේ

$n = 6 \qquad 6 \cdot 3 < \frac{100}{32}$ වලංගු නොවේ (5)

$n = 5$. (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

5. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා, $\lim_{y \to a} \frac{y^n - a^n}{y - a} = na^{n-1}$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$\lim_{x \to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4 - 4}{\sin 4x} = 2\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

(5) (5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4 - 4}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0}\left[\frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2}-\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{4\frac{\sin 4x}{4x}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2}-\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\lim_{x \to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}$$

(5) (5)

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot \frac{1}{1}$$ (දෙන ලද ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්)

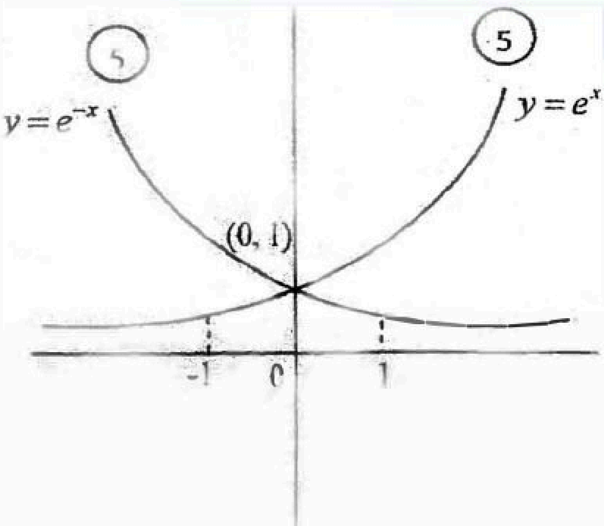
(5)

$$= (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

25

---

6. එක ම රූප සටහනක $y=e^x$ හා $y=e^{-x}$ වක්‍ර දෙකෙහි දළ සටහන් අඳින්න. x-අක්ෂයෙන් ද $-1 \le x \le 0$ පරාසය තුළ $y=e^x$ වක්‍රයෙන් හා $0 \le x \le 1$ පරාසය තුළ $y=e^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද ආවෘත වන පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ බව පෙන්වන්න.



$$A = \int_{-1}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{1} e^{-x}\,dx$$ (5)

$$\left[e^x\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{1}$$ (5)

$$= 1 - e^{-1} - e^{-1} + 1$$

$$2 - 2e^{-1}$$ (5)

$$= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

25

Alevelapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

7. පරාමිතික θ පරාමිතියක් ඇසුරෙන්, xy-තලයේ C වක්‍රයක් $x = 2 + \cos 2\theta$, $y = 4\sin\theta$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය θ ඇසුරෙන් සොයා, $\theta = \frac{\pi}{4}$ වන ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

C වක්‍රයෙහි පරාමිතික සමීකරණය: $x = 2 + \cos 2\theta$, $y = 4\sin\theta$.

$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta$; $\frac{dy}{d\theta} = 4\cos\theta$ (5)

$\frac{dy}{dx} = -\frac{4\cos\theta}{4\sin\theta\cos\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}$ (5)

$\theta = \frac{\pi}{4}$ විට, $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2}$ අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5)

$(2, 2\sqrt{2})$ ලක්ෂ්‍යයෙහි අභිලම්බයේ සමීකරණය: (5)

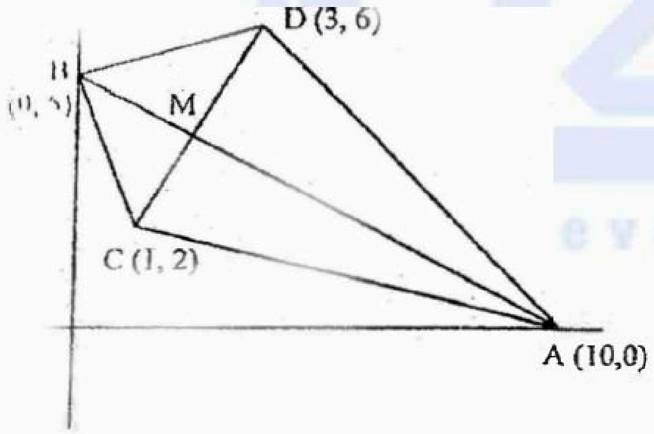
$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2)$ (5)

$\sqrt{2}y - 4 = x - 2 \Rightarrow x - \sqrt{2}y + 2 = 0.$

25

---

8. A (10,0) හා B (0,5) ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව C (1,2) හා D (3,6) ලක්ෂ්‍ය යා කරන CD රේඛා ඛණ්ඩයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදකය බව පෙන්වන්න.
ACBD චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 25 ක් බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.



CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය, $M(2, 4)$.

AB රේඛාවේ සමීකරණය: $\frac{y-5}{x-0} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x + 2y - 10 = 0$ (5)

$\because 2 + 2\times 4 - 10 = 0$ බැවින් M හි ඛණ්ඩාංක, ඉහත සමීකරණය සපුරාලයි. (5)

තවද, CD හි අනුක්‍රමණය $= \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$. $\therefore$ $CD \perp AB$. (5)

$ACBD$ හි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}\text{AB}(\text{MD}+\text{MC}) = \frac{1}{2}\text{AB.CD} = \frac{1}{2}\sqrt{100+25}\sqrt{2^2+4^2} = 25$

(5) (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

9. O මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා ද $y=1$ රේඛාවේත් $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ වෘත්තයේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දෙක හරහා ද යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න.

$x^2+y^2-2x-2y+1+\lambda(y-1)=0$ වෘත්තය (5) O මූලය හරහා යන නිසා

$1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1.$ (5)

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-2x-y=0$ (5)

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

කේන්ද්‍රය $\left(1,\frac{1}{2}\right)$, අරය $=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(5) (5)

25

---

10. $\sin\alpha+\sin\beta=1$ හා $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}$ යැයි ගනිමු; මෙහි α හා β සුළු කෝණ වේ. $\alpha+\beta$ හි අගය සොයන්න.

α හා β දෙකම සුළු කෝණ වේ.

$\sin\alpha+\sin\beta=1$, $\quad 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1$ (5)

$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}$ $\quad 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sqrt{3}$ (5)

බෙදීමෙන්, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, (5) $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ නිසා $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi/2$

(5)

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{3}.$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

11. (a) මාත්‍රය 4 වූ $F(x)$, $G(x)$ හා $H(x)$ යන බහුපද පහත දැක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.

$F(x) = \left(x^2 - \alpha x + 1\right)\left(x^2 - \beta x + 1\right)$, මෙහි α හා β තාත්වික නියත වේ;

$G(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$,

$H(x) = x^4 + x^2 + 1$.

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ යන දෙකට ම එක ම මූල තිබේ නම්, α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලු ම මූල සොයන්න.

(ii) $F(x) \equiv H(x)$ වෙයි නම්, α හා β ට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික නොවන බව පෙන්වන්න.

(b) (i) $f(x) = 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි γ හා δ තාත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(ii) සියලු ම තාත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න.

(a)

$$F(x) = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$$

$$= x^4 - (\alpha + \beta)x^3 + (2 + \alpha\beta)x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 \quad (5)$$

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ එකම මූල සහිත නම්, එවිට $G(x) = 6F(x) \Rightarrow$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 6[x^4 - (\alpha + \beta)x^3 + (2 + \alpha\beta)x^2 - (\alpha + \beta)x + 1] \quad (5)$$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්: $\alpha + \beta = \frac{35}{6}$ (5)

$$2 + \alpha\beta = \frac{62}{6} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{62}{6} - 2 = \frac{50}{6} \quad (5)$$

α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය,

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{35}{6}x + \frac{50}{6} = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 35x + 50 = 0$$

25

$$\Rightarrow (3x - 10)(2x - 5) = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow x = {}^{10}/_{3} \text{ or } x = {}^{5}/_{2}$$

$\alpha = {}^{10}/_{3}$ හා $\beta = {}^{5}/_{2}$ ලෙස ගනිම

(5) (5)

A level අපි — උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$G(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල, $F(x) = 0$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right)\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 0$ (5)

$\Leftrightarrow (3x^2 - 10x + 3)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(3x-1)(x-2)(2x-1) = 0$ (5)

$\Leftrightarrow x = 2, \frac{1}{2}, 3$ හෝ $\frac{1}{3}$

(5) (5)

35

(ii) $H(x) \equiv F(x)$ නම

$x^4 + x^2 + 1 = x^4 - (\alpha+\beta)x^3 + (2+\alpha\beta)x^2 - (\alpha+\beta)x + 1$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ (5)

$2 + \alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha\beta = -1$ (5) [*]

[*] $\Rightarrow \alpha(-\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 1$

$\Rightarrow \alpha = \pm 1$

එවිට $\beta = \mp 1$ (5)

15

> වෙනත් ක්‍රමයක්
>
> $\therefore$ α හා β, $x^2 - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ.
>
> $\Rightarrow x = \pm 1$ (5)
>
> $\alpha = 1$ හා $\beta = -1$ ලෙස ගනිමු.

$H(x) = 0$

$\Leftrightarrow F(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$ (5)

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ හෝ $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) < 0$; $\Delta' = 1 - 4(1)(1) < 0$ (5)

$\therefore H(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික මූල නොමැත.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

11. (a) චිත්‍රපට සංදර්ශන තරගයක විනිසුරුවන් ලෙස කටයුතු කිරීම සඳහා සාමාජික සාමාජිකාවන් හතර දෙනෙකුගෙන් සමන්විත විනිසුරු මඩුල්ලක් පිහිටුවා ගත යුතුව ඇත. මෙම විනිසුරු මඩුල්ල තෝරා ගත යුතු ඇත්තේ ක්‍රීඩිකාවන් තුන් දෙනකු, ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු, ගායිකාවන් හය දෙනකු, ගායකයින් පස් දෙනකු, නිළියන් දෙදෙනකු හා නළුවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමකිනි. ප්‍රධාන විනිසුරු, ක්‍රීඩකයකු හෝ ක්‍රීඩිකාවක හෝ විය යුතු ය. විනිසුරු මඩුල්ලේ අනෙක් තිදෙනා තෝරා ගත යුතු වන්නේ ක්‍රීඩක ක්‍රීඩිකාවන් හැර කණ්ඩායමේ ඉතිරි අයගෙන් ය. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ දී විනිසුරු මඩුල්ල පිහිටුවා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(i) අඩු තරමින් එක් ගායිකාවක හා එක් ගායකයකු මඩුල්ලට ඇතුළත් විය යුතු ම නම්,

(ii) ප්‍රධාන විනිසුරු ඇතුළුව පිරිමි දෙදෙනකු හා ගැහැනු දෙදෙනකු මඩුල්ලේ සිටිය යුතු ම නම්,

(iii) ප්‍රධාන විනිසුරු ක්‍රීඩිකාවක විය යුතු ම නම්.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 = r + C$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනයින්, අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \dfrac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$ යන්න $f(r) - f(r+2)$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $f(r)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වේ.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය, $\frac{1}{8^2}+\frac{1}{15^2}$ ඓක්‍යයට අභිසාරී වන බව අපෝහනය කරන්න.

(a)

ක්‍රීඩකයින්	ක්‍රීඩිකාවන්	ගායකයන්(MS)	ගායිකාවන්(FS)	නළුවන්	නිළියන්
2	3	5	6	4	2
	ප්‍රධානි		අනෙක් තිදෙනා		

(i) ප්‍රධානි 1+ FS 1+ MS1+ අනෙක් 1 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_1 \times {}^5C_1 \times {}^6C_1$ (5) +

ප්‍රධානි 1+ FS 2 +MS 1 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_2 \times {}^5C_1$ (5) + } (5)

ප්‍රධානි 1 + FS 1 + MS 2 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_1 \times {}^5C_2$ (5)

$= 900 + 375 + 300 = 1575$ (5) **25**

(ii) ගැහැණු ප්‍රධානි + ගැහැණු 1 + පිරිමි 2 $\Rightarrow {}^3C_1 \times {}^8C_1 \times {}^9C_2$ (5) (5)

පිරිමි ප්‍රධානි + ගැහැණු 2 + පිරිමි 1 $\Rightarrow {}^2C_1 \times {}^8C_2 \times {}^9C_1$ (5) (5) + (5)

$= 864 + 504$ (5) **30**

$= 1368$

(iii) ප්‍රධානි ලෙස ක්‍රීඩිකාවක් + ඕනෑම අනෙක් 3දෙනෙක් $\Rightarrow {}^3C_1 \times {}^{17}C_3$ (5) (5)

$= 2040$ (5) **15**

A level අපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(b) $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 \equiv r + C$

$$A(r^2+10r+25) - B(r^2+2r+1) \equiv r + C$$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්;

$r^2 :\ A - B = 0$ (5)

$r\ :\ 10A - 2B = 1$ (5)

(5) $r^0 :\ 25A - B = C$

$A = B = \frac{1}{8}$, (5) $C = 24A = 3$ (5) එනම් $(r+5)^2 - (r+1)^2 \equiv 8(r+3)$

25

දෙන ලද U_r සලකන්න:

$$U_r = \frac{8(r+3)}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2} = \frac{(r+5)^2 - (r+1)^2}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2}$$ (5) (5)

$$= \frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2} - \frac{1}{(r+3)^2(r+5)^2}$$

$= f(r) - f(r+2)$ මෙහි $f(r) = \frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2}$ (5)

15

$U_r = f(r) - f(r+2)$

$r = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා

$U_1 = f(1) - f(3)$

$U_2 = f(2) - f(4)$ (10)

$U_3 = f(3) - f(5)$

$\vdots$

$U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$ (10)

$U_n = f(n) - f(n+2)$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$ (5)

(5) (5)

$$= \frac{1}{2^2 4^2} + \frac{1}{3^2 5^2} - \frac{1}{(n+2)^2(n+4)^2} - \frac{1}{(n+3)^2(n+5)^2}$$

$\therefore \sum_{r}^{\infty} U_r = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2}$, $n \to \infty$ විට අවසාන පද දෙක ශුන්‍ය කරා එළඹෙන බැවින්.

(5)

40

A level API උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

13. (a) A, B හා C න්‍යාස තුනක්

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) $AC = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. CA ගුණිතයත් සොයන්න.

(ii) $BC = I_2$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

(iii) $(\lambda A + \mu B)C = I_2$ වේ නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

$D = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, A හා B ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, එනයින්, DC ගුණිතය සොයන්න.

(b) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ; මෙහි $\theta\,(-\pi < \theta \leq \pi)$ තාත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ඩ් සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

$\cos\theta$ හා $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\frac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$w = \frac{2z}{z^2+1}$ හා $t = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ යැයි ගනිමු; මෙහි z යන්න $z \neq \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

(i) $\text{Im}(w) = 0$ හා $\text{Re}(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. එනයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \text{ හා } C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i)

$$AC = \begin{pmatrix} 4-3 & 0 \\ 0 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

(5)

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (5)

10

(ii)

(5)

$$BC = \begin{pmatrix} 3a+2b & 4a+3b \\ 3c+2d & 4c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 වැනි පේළිය

$3a + 2b = 1$
$4a + 3b = 0$ } (5)

$3a + 2\left(\frac{-4a}{3}\right) = 1$

$a = 3, b = -4$ (5) (5)

2 වැනි පේළිය

$3c + 2d = 0$
$4c + 3d = 1$ } (5)

$4c + 3\left(\frac{-3c}{2}\right) = 1$

$c = -2, d = 3$ (5) (5)

$\therefore B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

35

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(5)

iii) $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC = (\lambda + \mu)I_2 = I_2$

$\Rightarrow (\lambda + \mu - 1)I_2 = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 1$ (5) | 10

α, β වෙනුවට λ, μ

$D = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5)

<u>1 වැනි තීරුව</u> 3 වැනි තීරුව

$\beta = -1$ (5) $\alpha = 2$ (5) | 15

එම නිසා $D = 2A - B$ හා $DC = (2A - B)C = 2AC - BC$ (5)

$= 2I_2 - I_2 = I_2$ (5) | 10

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $(-\pi < \theta \leq \pi)$

$|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1;$

z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය අරය 1 හා කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තය මත පිහිටයි.

(5) (5)

$z = \frac{1}{2}$

$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{z}$ (5)

$z + \bar{z} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (5)

$z - \bar{z} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ [redacted] | 25

i) $w = \frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{2}{z + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ (5) $\therefore \operatorname{Im}(w) = 0$

(5)

$t = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = \frac{i\sin\theta}{\cos\theta} = i\tan\theta$; $\therefore \operatorname{Re}(t) = 0$ | 10

$w^2 + t^2 = \sec^2\theta + (i\tan\theta)^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (5) | 05

ii) $w = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = 2$ or $\cos\theta = \frac{1}{2}$ (5)

දෙන ලද පරාසය තුළ $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ (5) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) | 15

iii) $t = i \Rightarrow i\tan\theta = i$ (5)

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

දෙන ලද පරාසය තුළ $\theta = \pi/4$ හෝ $\theta = (-3\pi)/4$. (5)

$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ (5)

15

A level අපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(b) (i) $f(x) = 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$

$f(-{}^{1}/_{2}) = 0$ බැවින්,

$2\left(\frac{1}{16}\right) + \gamma\left(-\frac{1}{8}\right) + \delta\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

$1 - \gamma - 4\delta + 8 = 0$

$\gamma + 4\delta = 9$ (5)

$f(-2) = 21$ බැවින්,

$2(16) + \gamma(-8) + \delta(-2) + 1 = 21$

$8\gamma + 2\delta = 12$

$4\gamma + \delta = 6$ (5)

$\gamma = 1$ හා $\delta = 2$

(5) (5)

$\therefore f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1$

$= (2x+1)(x^3+1) \quad \because f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

$= (2x+1)(x+1)(x^2 - x + 1)$

$f(x)$ හි ඒකජ සාධක දෙක $x+1$ හා $2x+1$ වේ.

(5) (5) **30**

(ii) $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$

$P(x) = ax + b$ හා $Q(x) = cx + d$ යැයි ගනිමු.

එවිට $(x^2 + x + 1)(ax + b) + (x^2 - 1)(cx + d) = 3x$ (5)

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$a + c = 0$ .... (1) (5)

$b + a + d = 0$ .... (2) (5)

$b + a - c = 3$ .... (3) (5)

$b - d = 0$ .... (4) (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(1)න් , $c = -2$, තවද (4)න් $d = -1$

$\therefore\ P(x) = 2x - 1$ හා $Q(x) = -2x - 1$

(5) (5)

35

වෙනත් ක්‍රමයක්

(ii) $(x^2 + x + 1)P(x) + (x^2 - 1)Q(x) = 3x$

$P(x) = ax + b$ හා $Q(x) = cx + d$ යැයි ගනිමු

එවිට $(x^2 + x + 1)(ax + b) + (x^2 - 1)(cx + d) = 3x$ (5)

$x = 1:\ 3(a + b) = 3 \Rightarrow a + b = 1$ (5)

$x = -1:\ -a + b = -3$ (5)

$x = 0:\ -1 - d = 0$ (5)

$x = \frac{1}{2}:\ \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(-\frac{c}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$ (5)

$x = 0:\ -1 - d = 0 \Rightarrow d = -1$

$\Rightarrow c = -2$

$P(x) = 2x - 1$ $Q(x) = -2x - 1$

(5) (5)

15

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

14. (a) $x \neq 0$ සඳහා $y = x \sin\frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x\frac{dy}{dx} = y - \cos\frac{1}{x}$ හා

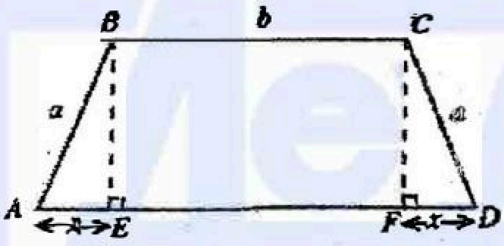
(ii) $x^4\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

බව පෙන්වන්න.

(b) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(c) දී ඇති රූපයෙහි, $ABCD$ යනු, BC හා AD සමාන්තර පාද සහිත ත්‍රපීසියමකි. සෙන්ටිමීටරවලින් මනිනු ලබන එහි පාදවල දිග $AB = CD = a$, $BC = b$ හා $AD = b + 2x$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $0 < x < a$ වේ. BE හා CF යනු පිළිවෙළින් B හා C ශීර්ෂවල සිට AD පාදය මතට ඇඳි ලම්බ වේ.



$ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $S(x)$, වර්ග සෙන්ටිමීටරවලින් $S(x) = (b+x)\sqrt{a^2-x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ නම්, x හි එක්තරා අගයකට $S(x)$ උපරිම වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, x හි එම අගය හා ත්‍රපීසියමේ උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න.

(a) $y = x.\sin(1/x)$, $x \neq 0$

(i) $\frac{dy}{dx} = \sin(1/x) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos(1/x)$ (5) x වලින් ගුණ කිරීමෙන් (5)

$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = y - \cos(1/x)$

10

(ii) x විෂයෙන් අවකලනයෙන් හා $\sin(1/x) = y/x$ යෙදීමෙන්:

$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \sin(1/x).\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ (10) ⟸ (0 හෝ 10)

x^3 මගින් ගුණකිරීමෙන් $\Rightarrow$ $x^4\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (5)

15

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(b) $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 . 4x - (2x^2+1) . 2(x-1)}{(x-1)^4}$$ (10)

$$= \frac{(x-1)4x - 2(2x^2+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^3} \quad ; (x \neq 1)$$ (5)

$x = \frac{-1}{2}$ වන විට $f'(x) = 0$ වේ. (5)

$x = 1$ වන විට $f'(x)$ නොපවතී.

$\Rightarrow x = 1$ හිදී සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් ඇත. (5)

	$x < (-1/2)$	$(-1/2) < x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	( )
	↘	↗	↘

(10) (5) + (5)

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2(-1/2)^2+1}{\left(\frac{-1}{2}-1\right)^2} = \frac{3/2}{(-3/2)^2} = 2/3$ (5)

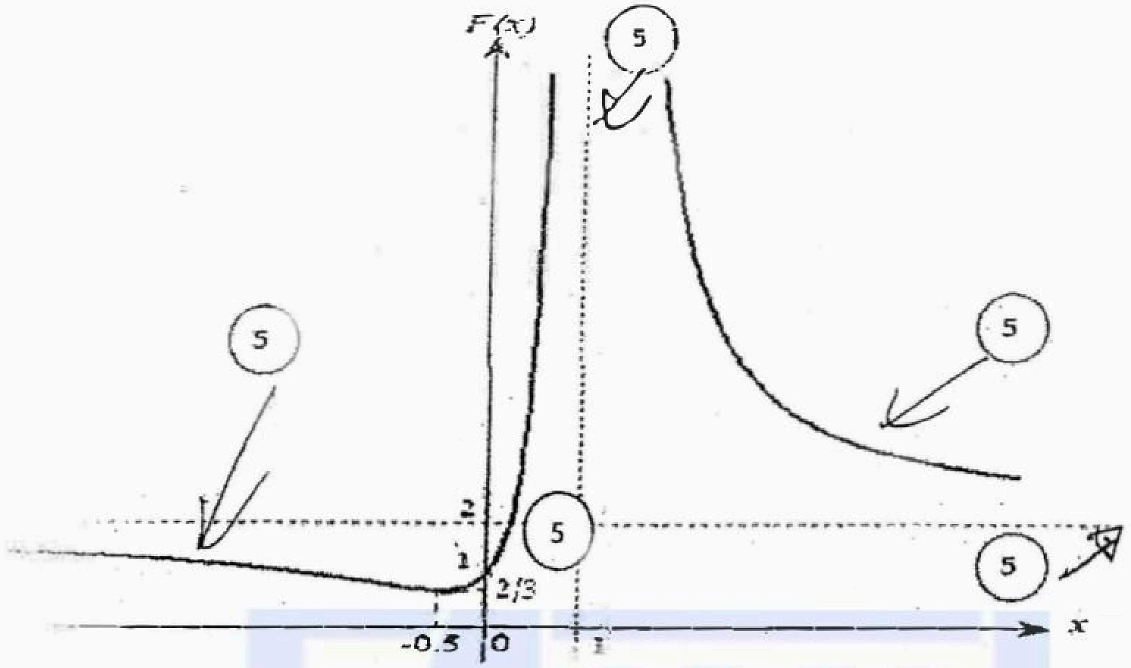
$\therefore f(x), \left(\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ස්ථානීය අවමයක් ගනී.

$x > 1$ හා $f(x) < 0$

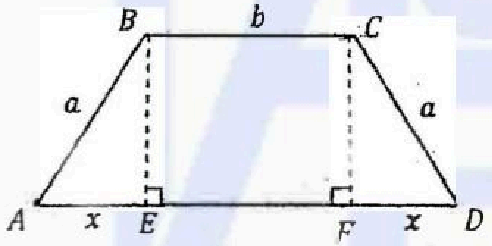
$x \to +\infty, \quad f(x) \to 2$

$x \to -\infty, \quad f(x) \to 2.$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .



50



වර්ගඵලය: $S(x) = 2 \times \frac{1}{2}\, x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) + b\sqrt{a^2 - x^2} \;=\; (b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ (10)

10

$a \quad \sqrt{6}$, $b = 4$ ආදේශයෙන්,

$$S(x) = (4 + x)\sqrt{6 - x^2} \quad (5)$$

$$\frac{dS}{dx} = (4 + x)\frac{1}{2\sqrt{6-x^2}}(-2x) + \sqrt{6 - x^2} \quad (5)$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-x\ (4 + x) + 6 - x^2}{2\sqrt{6-x^2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-2x^2 - 4x + 6}{\sqrt{6-x^2}} = \frac{-2(x^2 + 2x - 3)}{\sqrt{6-x^2}} \quad (5)$$

$\frac{dS}{dx} = 0$ වන විට $x^2 + 2x - 3 = 0$ (5)

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

x ධන බැවින් $x = 1$ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් දෙයි. (5)

	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt{6}$
$S'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(-)
	(5)	(5)

$\therefore x = 1$ හිදී $S(x)$ උපරිම වේ. (5)

$S(x)$ හි උපරිම අගය, $S(1) = (4+1)\sqrt{6-1} = 5\sqrt{5}$ වර්ග ඒකක. (5)

45

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

15. (a) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\pi - x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

එනයින්, $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(b) සුදුසු ආදේශයක් හා කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

(c) $\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනයින්, $\frac{1}{x^3-1}$ යන්න x විෂයයෙන් අනුකලනය කරන්න.

(d) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(a) $y = \pi - x$ යැයි ගනිමු. (5) (5)

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{0} f(\pi - y)(-dy) = \int_0^{\pi} f(\pi - y)dy = \int_0^{\pi} f(\pi - x)dx$$ 10

---

(5)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - 0 = \frac{\pi}{4}, \quad \because [\sin 2x]_0^{\pi/2} = 0$$

(5) 10

පළමු ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්,

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x\ dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^2(\pi - x)\ dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\ dx - \int_0^{\pi} x\ \sin^2 x\ dx$$ (5)

$$2\int_0^{\pi} x\sin^2 x\ dx = \pi\left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x\ dx\right]$$ (5) (5)

$$= \pi\left[\frac{\pi}{4} + J\right]$$ මෙහි $J = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x\ dx$

(5)

$\pi - x = y$ ආදේශයෙන්, (5)

$$J = \int_{\pi/2}^{0} \sin^2(\pi - y)\ (-dy) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y\ dy = \pi/4$$

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(5)

$$\therefore \int_0^{\pi} x\sin^2 x \; dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\pi \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

(b) ආදේශය:

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ (5)

$\therefore \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int te^t dt$ (5)

$= \frac{1}{2}\int t\frac{d}{dt}(e^t)dt = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\int e^t dt$ (5)

$= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + C$ (5) . ආදේශය: $t = x^2$, $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C$ (5) (5)

(c) $\frac{1}{x^3 - 1} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$

$1 \equiv A(x^2 + x + 1) + (x - 1)(Bx + C)$

x^0 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන් , $1 = A - C$

x^1 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන් , $0 = A + C - B$

x^2 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $0 = A + B$

$A = \frac{1}{3}$ (5) $B = -\frac{1}{3}$, (5) $C = -\frac{2}{3}$ (5)

$$\int\frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3}\int\frac{(x + 2)}{x^2 + x + 1}dx$$

(5)

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{3}{2}}{x^2 + x + 1}dx$$ (5)

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$ (5)

(5) (5)

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

(5) (5)

35

(d) ආදේශය: $t=\tan(x/2) \Rightarrow dt=\frac{1}{2}(1+t^2)\,dx \Rightarrow dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$ (5)

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x}=\int_0^1\frac{\frac{2}{(1+t^2)}dt}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+3.\frac{2t}{1+t^2}}$$ (5)

$$=\int_0^1\frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)+6t}$$

(5)
$$=\int_0^1\frac{2\,dt}{t^2+6t+9}$$

$$=\int_0^1\frac{2dt}{(t+3)^2}=2\left[\frac{-1}{t+3}\right]_0^1=2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{6}$$

(5)

20

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

16. වෘත්ත දෙකක සමීකරණ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ යැයි ගනිමු. මෙම වෘත්ත ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, $2gg'+2ff'=c+c'$ බව පෙන්වන්න.

$x^2+y^2-8x-6y+16=0$ සමීකරණය සහිත C වෘත්තය x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

O මූලයෙහි කේන්ද්‍රය පිහිටන, අරය r වූ C_1 වෘත්තයක් හා අරය $R\ (>r)$ වූ C_2 වෘත්තයක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී C වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. r හා R හි අගයන් ද A හා B හි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

S යනු, C හා C_1 යන වෘත්ත දෙකට ම ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වන හා y-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් යැයි ගනිමු. S සඳහා තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක සොයන්න.

C හා C_2 යන වෘත්ත දෙකට ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ඇඳි පොදු ස්පර්ශකය x-අක්ෂය P හි දී ද y-අක්ෂය Q හි දී ද හමු වේ. පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $4x+3y=40$ බව ද, PQ විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $3(x^2+y^2)-30x-40y=0$ බව ද පෙන්වන්න.

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, එවිට $(g-g')^2+(f-f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$. (5)

(5) (5)

15

$\Rightarrow 2gg'+2ff'=c+c'$

C වෘත්තය $x^2+y^2-8x-6y+16=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=3^2$.

වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(4,3)$ (5) අරය $=3$ (5)

මෙම වෘත්තය $(4,0)$හිදී x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි, ∵ කේන්ද්‍රයේ y-ඛණ්ඩාංකය $=3$ (5)

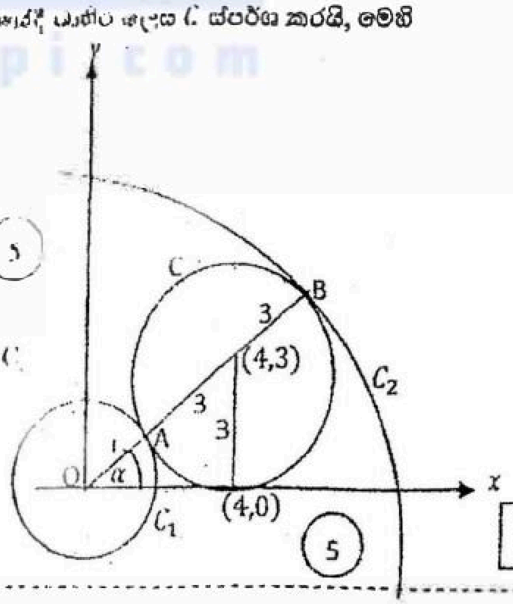
15

C_1 වෘත්තය : $x^2+y^2=r^2$, $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ ලක්ෂ්‍යයේදී බාහිරව ලෙස C ස්පර්ශ කරයි, මෙහි

$\cos\alpha=\frac{4}{5}, \sin\alpha=\frac{3}{5}$.

$r+3=5 \Rightarrow r=2$ (5)

$\therefore A\equiv\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ (5)



C_2 වෘත්තය: $x^2+y^2=R^2$ B ලක්ෂ්‍යයේදී අභ්‍යන්තර ලෙස C ස්පර්ශ කරයි. (5)

$R=5+3=8$ (5)

$\therefore\ B\equiv(8\cos\alpha,\ 8\sin\alpha)=\left(\frac{32}{5},\frac{24}{5}\right)$ (5)

30

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

C හා C_1 ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා y - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය S යැයි ගනිමු.

$$S: \; x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

එහි කේන්ද්‍රය; $(-g, -f)$ හා අරය $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\because S$, y - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බැවින් අරය$= |g|$, (5)

$g^2 + f^2 - c = g^2 \Rightarrow f = \pm\sqrt{c}$. (5)

(5)

S හා C_1 ප්‍රලම්බව ඡේදනය $\Longrightarrow 0 + 0 = c - 2^2 \Rightarrow c = 4$. එම නිසා $f = \pm 2$ (5)

S හා දෙන ලද C වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය $\Longrightarrow 2g(-4) + 2f(-3) = 4 + 16 = 20$ (5)

$$\Longrightarrow 4g + 3f + 10 = 0 \quad (5)$$

$f = +2 \;\Longrightarrow\; 4g = -10 - 6 \Longrightarrow g = -4$ (5)

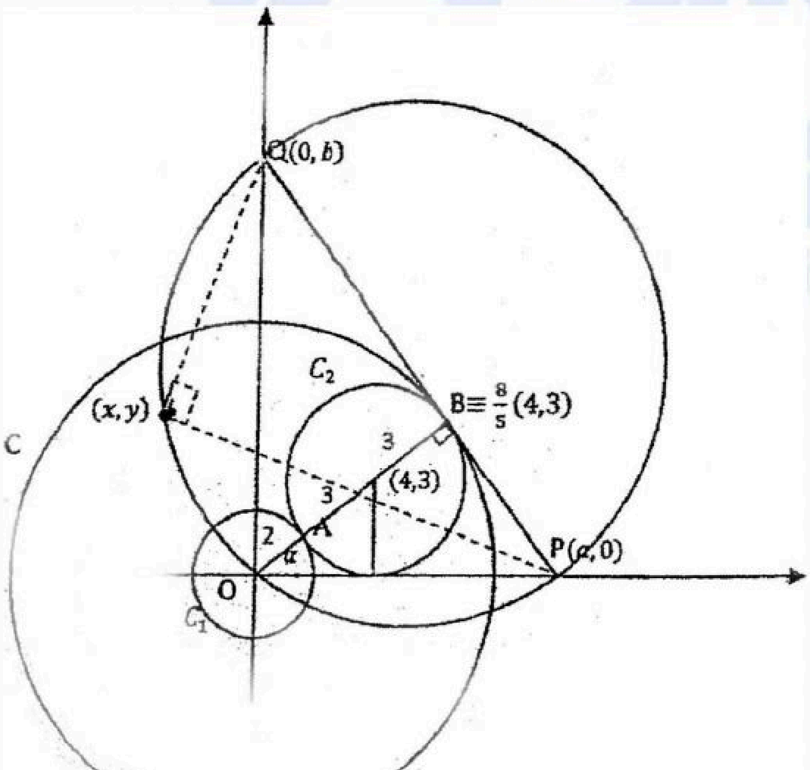
$f = -2 \;\Longrightarrow\; 4g = -10 + 6 \Longrightarrow g = -1$ (5)

S හි තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක වන්නේ

$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ සහ (5)

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ (5)

50



උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

C හා C_2 ට පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ වේ; මෙහි $P\equiv(a,0)$ හා $Q\equiv(0,b)$ යනු එයට ඛණ්ඩාංක අක්ෂ දෙක හමුවන ලක්ෂයයි. (10)

$a=8\sec\alpha=8.\frac{5}{4}=10 \Rightarrow P\equiv(10,0)$ (5)

$b=8\,cosec\,\alpha=8.\frac{5}{3}=\frac{40}{3}\Rightarrow Q\equiv\left(0,\frac{40}{3}\right)$ (5)

PQ හි සමීකරණය $\frac{x}{10}+\frac{3y}{40}=1$ (5) $\Rightarrow$ $4x+3y=40$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

C හා C_2 වෘත්තවල පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $(x^2+y^2-8x-6y+16)-(x^2+y^2-64)=0$ (

මඟින් දෙනු ලැබේ.

$\Rightarrow 8x+6y-80=0 \Rightarrow 4x+3y=40.$ (5)

එමනිසා $P\equiv(10,0)$ හා $Q\equiv\left(0,\frac{40}{3}\right)$

(5) (5)

PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තය මත (x,y) ලක්ෂ්‍යයක් සපුරාලන අවශ්‍යතාවය:

$$\left(\frac{y-0}{x-a}\right)\left(\frac{y-b}{x-0}\right)=-1 \quad (5)$$

හෝ

$$x(x-a)+y(y-b)=0 \quad (5)$$

$$\text{i.e. } x^2+y^2-ax-by=0$$

$$x^2+y^2-10x-\frac{40}{3}y=0 \quad (5)$$

හෝ

$$3(x^2+y^2)-30x-40y=0$$

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

17. (a) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=1$ බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x)=\cos 2x+\sin 2x+2(\cos x+\sin x)+1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $k(1+\cos x)\sin(x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\dfrac{f(x)}{1+\cos x}=\sqrt{2}\{g(x)-1\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$y=g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ ඒනයින්, ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x)=0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(c) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$$a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}=(b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$ බව පෙන්වන්න.

(a) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=1.$

$$=\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta]+\cos^2\alpha+\cos^2\beta \quad (5)$$

(5) (5)

$$=-[\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta][\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta]+\cos^2\alpha+\cos^2\beta \quad (5)$$

(5) (5)

$$=-\cos^2\alpha\cos^2\beta+(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta$$

$$=1$$

30

(b) $f(x)=\cos 2x+\sin 2x+2(\cos x+\sin x)+1$

$$=2\cos^2x-1+2\sin x\cos x+2\cos x+2\sin x+1 \quad (5)$$

$$=2\cos x(\cos x+1)+2\sin x(\cos x+1) \quad (5)$$

$$=2\sqrt{2}(\cos x+1)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad (5)$$

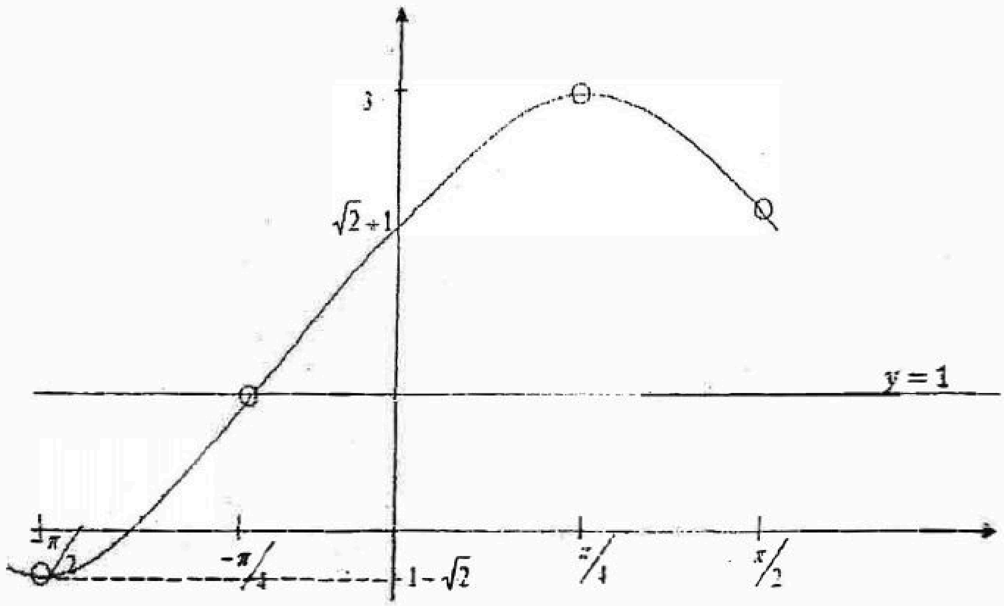
(5) $k=2\sqrt{2},\ \alpha=\frac{\pi}{4}$ (5)

25

$$\frac{f(x)}{1+\cos x}=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\{g(x)-1\} \quad (5)$$

$$y=g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1 \quad (5)$$

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .



හැඩය (5) [redacted]ත. උපරිම (05) දෙකෙළවර (5)

$x=0,\ y=\sqrt{2}+1$ (5) $y=1$ (5)

$f(x)=0 \Rightarrow g(x)=1$ (5) ට එක විසඳුමක් පමණක් පවතී. $\therefore f(x)=0$ ට එක විසඳුමක් පමණක් පවතී. (5)

$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}$

45

---

(5)

(c) $A+B+C=\pi$ වන විට , සයින් නීතිය $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ (5)

(5)

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$ (5)

(5)

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$ හා ~~$\because A+B+C=\pi$~~

(5)

$$=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}}$$ (5) ———— $\because A+B+C=\pi$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$ (5)

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \qquad \text{———————} \quad **$$

(*) හා (**) සමීකරණ ගුණ කිරීමෙන්,

(5)

$$\frac{a(b-c)}{(b+c)^2} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$a(b-c)\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = (b+c)^2\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad (5)$$

$$a(b-c)cot\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{A}{2} = (b+c)^2 tan\left(\frac{B-C}{2}\right) sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

50

නවත් ක්‍රමයක්

(5) (5)

$A+B+C=\pi$ වන විට , සයින් නීතිය $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{a(b-c)}{(b+c)^2} = \frac{\sin A\,(\sin B - \sin C)}{(\sin B + \sin C)^2} \quad (10) \quad (5)$$

$$= \frac{\sin A.2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{4sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right)cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad (5) \quad (5)$$

$$= \frac{\sin A.\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad (5) \quad (\because A+B+C=\pi)$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}.\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad (5)$$

$$\sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}.\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad (5)$$

$$\Rightarrow a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

50

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .