

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2016

10 - සංඝ්‍රහිත ගණිතය

ලකුණු වෙදියාම

• II පත්‍රය

A කොටස - $10 \times 25 = 250$

B කොටස - $05 \times 150 = 750$

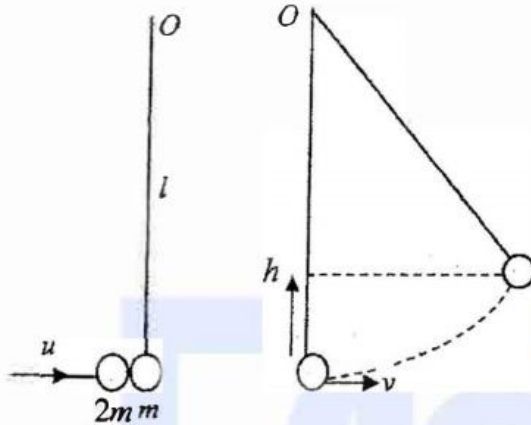
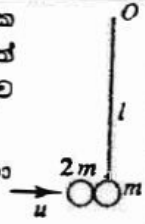
එකතුව - $1000 / 10$

• II පත්‍රය - අවසාන ලකුණු - 100

www.alevelapi.com

1. එක් කෙළවරක් O අවල ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසන ලද දිග l වූ සැකැල්ලු අවිතනය තත්ත්වයක අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සමතුලිතව එල්ලෙයි. ස්කන්ධය $2m$ වූ තවත් අංශුවක් u ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව පළමු අංශුව සමග ගැටී එම සමග හාවේ. සංයුක්ත අංශුව චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය සොයන්න.

$u = \sqrt{gl}$ නම්, සංයුක්ත අංශුව එහි ආරම්භක මට්ටමෙන් ඉහළට $\frac{2l}{9}$ උපරිම උසක් කරා ළඟා වන බව පෙන්වන්න.



සංයුක්ත අංශුව චලිතය වීමට පටන් ගන්නා ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු.

පද්ධතියට $I = \Delta(Mv)$ යොදමු.

$$\rightarrow 0 = 3mv - 2m \times u$$

$$\Rightarrow v = \frac{2u}{3}$$

5
5

ශක්තිය සංස්ථික නියමය මගින්, $(3mg)h = \frac{1}{2}(3m)v^2$ වේ, මෙහි h යනු අවශ්‍ය උස වේ.

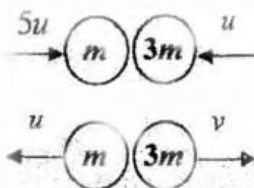
$$\therefore h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4u^2}{9(2g)} = \frac{4gl}{18g} = \frac{2l}{9}$$

10

ප්‍රශ්න

25

2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවක් සුමට තිරස් මෙයයක් මත එක ම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් $5u$ හා u වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වේ. ඒවායේ ගැටුමෙන් පසු ව, P හා Q එකිනෙක ඉවතට පිළිවෙළින් u හා v වේගවලින් චලනය වේ. u ඇසුරෙන් v සොයා, P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගතිය සංගුණකය $\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය සඳහා $I = \Delta(Mv)$ යොදමු.

$$\rightarrow 0 = (3mv - mu) - (5mu - 3mu) \quad \leftarrow (5)$$

$$\Rightarrow 3mv = 3mu$$

$$\Rightarrow v = u \quad \leftarrow (1) \quad (5)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය මගින්

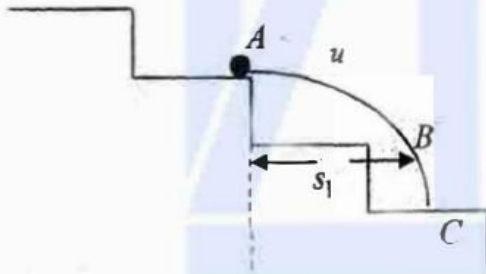
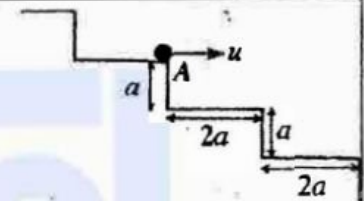
$$v + u = e(5u + u) \quad \leftarrow (10)$$

$$(1) \Rightarrow 2u = 6eu$$

$$\therefore e = \frac{1}{3} \quad \leftarrow (5)$$

25

3. P අංශුවක්, අවල පටි පෙළක පටියක දාරයෙහි වූ A ලක්ෂ්‍යයක සිට එම දාරයට ලම්බව $u = \frac{3}{2}\sqrt{ga}$ මගින් දෙනු ලබන u ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබ, ඉරාත්වය යටතේ චලනය වේ. එක් එක් පටියේ උස a හා දිග $2a$ වේ (රූපය බලන්න). P අංශුව A ට පහළින් පළමු පටියේ කොටසක බවත් A ට පහළින් දෙවන පටියේ A සිට $3a$ තිරස් දුරකින් වැදින බවත් පෙන්වන්න.



P හි චලිතය සඳහා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යොදමු.

$\downarrow$ A සිට B දක්වා: $a = \frac{1}{2}gt_1^2$, මෙහි t_1 යනු A ට පහළින් වූ පළමු පටිය වෙත ලගා වීමට ගනු ලැබූ කාලය වේ. (5)

$$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

t_1 කාලයකදී චලනය වූ තිරස් දුර s_1 යැයි ගනිමු.

$$\rightarrow A \text{ සිට } B \text{ දක්වා: } s_1 = u \times t_1 = \frac{3}{2}\sqrt{ga} \times \sqrt{\frac{2a}{g}} = \frac{3}{\sqrt{2}}a > 2a. \quad (5)$$

එබැවින් P අංශුව A ට පහළින් වූ පළමු පඩියේ නොවේ.

A සිට C දක්වා ගනු ලැබූ කාලය $t_2 = \sqrt{\frac{2(2a)}{g}}$ වේ. ← (5)

$$\rightarrow s = ut_2 = \frac{3}{2}\sqrt{ga} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{g}} = 3a.$$

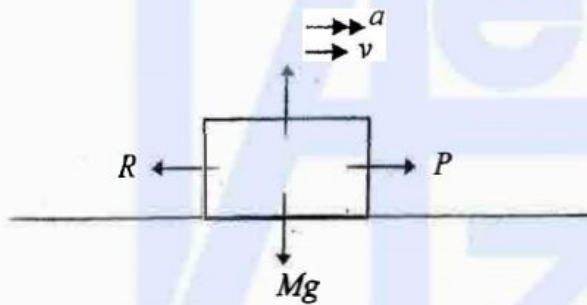
(5)

25

4. RN නියත විශාලත්වයකින් යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව සෘජු සමතලා පාරක් දිගේ ස්කන්ධය M kg වූ කාරයක් චලනය වේ. කාරය v m s⁻¹ වේගයෙන් චලනය වන මොහොතක දී එහි ත්වරණය a m s⁻² වේ. මෙම මොහොතේ දී එහි එන්ජිමේ ජවය $(R + Ma)v$ W බව පෙන්වන්න.

කාරය ඊළඟට එම RN නියත විශාලත්වයෙන් ම යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව එම ජවයෙන් ම ක්‍රියා කරමින් තිරසර α කෝණයකින් ආනත වූ සෘජු පාරක ඉහළට v_1 m s⁻¹ නියත වේගයක් සහිත ව චලනය වේ.

$$v_1 = \frac{(R + Ma)v}{R + Mg \sin \alpha} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$



ප්‍රකර්ශන බලය PN යැයි ගනිමු.

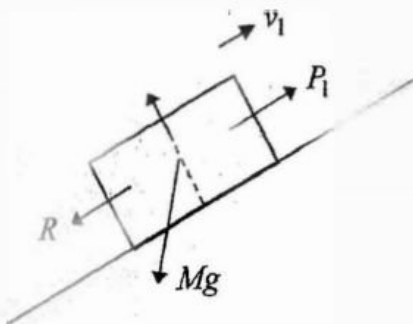
$$F = ma \rightarrow \text{යොදමු.}$$

$$P - R = Ma \dots \dots \dots (1) \quad (5)$$

HW යනු එන්ජිමේ ජවය යැයි ගනිමු.

$$\text{එවිට } H = P \times v \quad \leftarrow (5)$$

$$= (R + Ma)v \quad (\text{by (1)}) \quad \leftarrow (5)$$



$$\underline{1} \alpha$$

$$\underline{F} = m \underline{a} :$$

$$P_1 - R - Mg \sin \alpha = 0 \text{ ----- (2) } \quad (5)$$

$$\text{තවද } H = P_1 \times v_1$$

$$\therefore v_1 = \frac{H}{P_1} = \frac{(R + Ma)v}{(R + Mg \sin \alpha)} \quad ((2) \text{ න් })$$

(5)

25

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\underline{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\underline{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ හා $\underline{c} = \alpha\mathbf{i} + (1 - \alpha)\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) $|\underline{a}|$ හා $|\underline{b}|$,

(ii) $\underline{a} \cdot \underline{c}$ හා $\underline{b} \cdot \underline{c}$

සොයන්න.

$\underline{a}$ හා $\underline{c}$ අතර කෝණය $\underline{b}$ හා $\underline{c}$ අතර කෝණයට සමාන නම්, $\alpha = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(i)

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

} (5) -for both

(ii) $\underline{a} \cdot \underline{c} = 3\alpha + 4(1 - \alpha) = 4 - \alpha$

$$\underline{b} \cdot \underline{c} = 4\alpha + 3(1 - \alpha) = 3 + \alpha$$

$\underline{a}$ හා $\underline{c}$ අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු. එවිට $\underline{a} \cdot \underline{c} = |\underline{a}| |\underline{c}| \cos \theta$ හා $\underline{b} \cdot \underline{c} = |\underline{b}| |\underline{c}| \cos \theta$.

$$|\underline{a}| = |\underline{b}|, \text{ බැවින් } \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}.$$

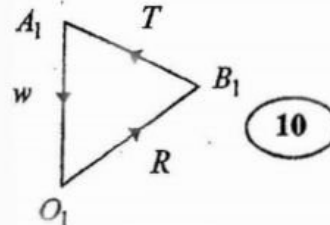
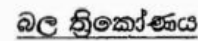
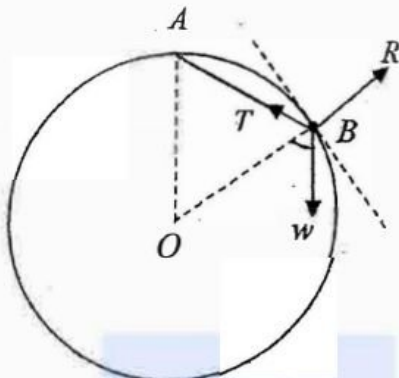
$$\therefore 4 - \alpha = 3 + \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

(5)

25

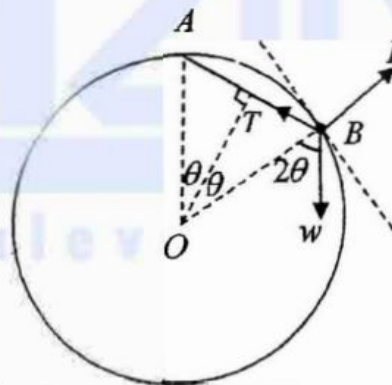
6. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිකතා තත්ත්වක එක් කෙළවරක්, සිරස් තලයක සවි කර ඇති අරය a ($> \sqrt{2}l$) වූ සිහින්, සුමට දෘඪ වාණ්ණාකාර කම්බියක උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ඇඳා ඇත. කම්බිය දිගේ චලනය වීමට නිදහස ඇති බර w වූ කුඩා සුමට පබළුවක් තත්ත්වයේ අනෙක් කෙළවරට ඇඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තත්ත්ව තදව, පබළුව සම්පූර්ණතාවයේ පවතී. පබළුව මත ක්‍රියා කරන බල ලකුණු කර, තත්ත්වේ ආතතිය $\frac{2wl}{a}$ බව පෙන්වන්න.



$$\frac{T}{AB} = \frac{w}{OA} \Rightarrow T = \frac{2wl}{a}$$

25

විකල්ප ක්‍රමය 1



ලාම් ප්‍රමේයය මගින්, $\frac{T}{\sin(\pi - 2\theta)} = \frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$

$$\therefore T = w \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta}$$

$$= 2w \sin \theta = \frac{2wl}{a} \left(\because \sin \theta = \frac{l}{a} \right).$$

25

$$\Rightarrow \frac{5p}{12} = p \cdot \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{5}{6} \quad (\because p > 0)$$

5

25

8. මල්ලක, පාවිත් හැර අත් සෑම අයුරකින් ම සමාන වූ, සුදු බෝල 6 ක් හා කළු බෝල n අඩංගු වේ. එකකට පසු ව අනෙක ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව බෝල දෙකක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{4}{15}$ වේ. n හි අගය සොයන්න.

$$\text{පළමු බෝලය සුදු වීමේ සම්භාවිතාව} = \frac{6}{n+6}$$

$$\text{පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව} = \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)} \quad 10$$

$$\therefore \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)} = \frac{4}{15} \quad 5$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 23n + 60 = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow (n-4)(2n-15) = 0$$

$$\Rightarrow n = 4. \quad (\because n \text{ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.}) \quad 5$$

25

9. 11 ට අඩු ප්‍රතිත්ත නිඛිල තුනක මධ්‍යන්‍යය 7 වේ. තවත් නිඛිල දෙකක් ගත් විට නිඛිල පහේම මධ්‍යන්‍යය 5 වේ. තවද මෙම නිඛිල පහේ එක ම මාතය 3 වේ. නිඛිල පහ සොයන්න.

x, y හා z යනු මධ්‍යන්‍යය 7 වූ 11 ට අඩු ප්‍රතිත්ත පූර්ණ සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$$\text{එවිට } \frac{x+y+z}{3} = 7. \quad 5$$

$$\Rightarrow x+y+z = 21 \quad (1)$$

x, y හා z ප්‍රතිත්ත හා එකම මාතය 3 බැවින් අමතරව ගත් පූර්ණ සංඛ්‍යා දෙකෙන් අඩු තරමින් එකක්වත් 3 විය යුතුය. අනෙක t යැයි ගනිමු.

$$\text{පූර්ණ සංඛ්‍යා පහෙහි මධ්‍යන්‍යය 5 බැවින් } \frac{x+y+z+t+3}{5} = 5 \text{ වේ.} \quad 5$$

$$\Rightarrow 21+3+t = 25$$



$$\Rightarrow i=1 \text{ (5)}$$

ඒ නයින්, පූර්ණ සංඛ්‍යා $x, y, z, 3, 1$ වේ. එකම මාතය 3 ද x, y හා z ප්‍රතින්න ද බැවින් ඒවායින් හරියටම එකක් 3 විය යුතුය. $z = 3$ යැයි ගනිමු.

$$\text{නැවත (1)} \Rightarrow x + y = 18 \text{ (2) (5)}$$

x හා y යනු 11ට අඩු පූර්ණ සංඛ්‍යා බැවින් (2) න් ($x = 8$ හා $y = 10$) හෝ ($x = 10$ හා $y = 8$) වේ. ඒ නයින්, සංඛ්‍යා පහ 1, 3, 3, 8 හා 10 වේ.

(5)

25

10. 1, 2, 3, 4 හා 5 ලෙස අංක කළ සමාන කේන්ද්‍රික බණ්ඩ පහකින් සමන්විත, ප්‍රමණය වන වෘත්තාකාර ඉලක්ක පුවරුවක් වෙතට ඊතලකන් විදිනු ලැබේ. එක් එක් බණ්ඩයෙහි ඊතලය වදින වාර ගණන පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යුහයෙන් දෙනු ලැබේ; මෙහි p හා q නියත වේ.

අංකය	1	2	3	4	5
සංඛ්‍යාතය	1	p	q	5	2

ඉහත දත්තවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලකාව පිළිවෙළින් 3 හා $\frac{6}{5}$ බව දී ඇත්නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

$$\text{මධ්‍යන්‍යය } \mu = 3 \Rightarrow \frac{1 + 2p + 3q + 20 + 10}{p + q + 8} = 3 \text{ (5)}$$

$$\Rightarrow 2p + 3q + 31 = 3p + 3q + 24$$

$$\Rightarrow p = 7 \text{ (5)}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \mu^2 \text{ (5)}$$

$$\text{විචලකාවය} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1 \cdot 1^2 + 7 \cdot 2^2 + q \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2}{q + 15} - 3^2 \text{ (5)}$$

$$\Rightarrow 51(q + 15) = 5(1 + 28 + 9q + 80 + 50)$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ (5)}$$

25

විකල්ප ක්‍රමය

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (5)$$

$$\text{විචලකතාවය} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1(1-3)^2 + 7(2-3)^2 + q(3-3)^2 + 5(4-3)^2 + 2(5-3)^2}{1+7+q+5+2}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{4+7+5+8}{15+q}$$

$$\Rightarrow q = 5.$$

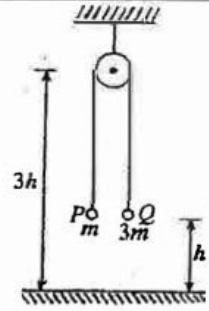
5

5

15

Part B

11. (a) අප්‍රකාශයේ නිරන්තරයෙන්ම $3h$ උසක් ඉහළින් සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මගින් යන සැහැල්ලු අවිකතා තන්තුවක් මගින්, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී අංශු දෙක ගෙබිමට h උසකින් තන්තුව තදව ඇතිව අල්වා තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. (යාබද රූපය බලන්න.) P හා Q හි චලිතයන්ට වෙන වෙනම නිරීච්ඡන් දෙවෙනි නියමය යෙදීමෙන්, එක් එක් අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය $\frac{g}{2}$ බව පෙන්වන්න.

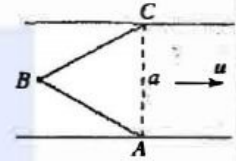


t_0 කාලයකට පසුව Q අංශුව ගෙබිම සමග ගැටී ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවයට පැමිණ, තවත් t_1 කාලයක් නිශ්චලතාවයේ තිබී උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරයි. Q අංශුව උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරන ආකාරයේ P හා Q අංශු දෙකෙහි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් වෙන වෙනම අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්ථාර භාවිතයෙන්, $t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ බව පෙන්වා, g හා h ඇසුරෙන් t_1 සොයන්න.

P අංශුව ගෙබිමේ සිට $\frac{5h}{2}$ උපරිම උසකට ළඟා වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

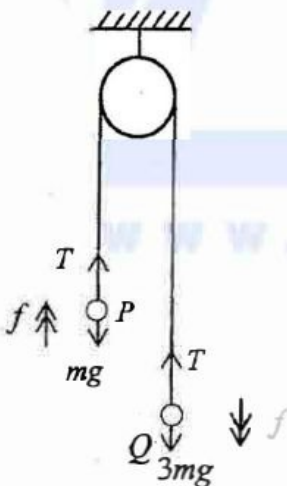
- (b) පළල a වූ සෘජු ගසක් ඒකාකාර u වේගයකින් ගලයි. ගස ගලන දිශාවට AC රේඛාව ලම්භ වන පරිදි A හා C ලක්ෂ්‍ය ගසේ ප්‍රතිවිරුද්ධ ඉවුරු දෙකෙහි පිහිටා ඇත. තව ද ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන පරිදි AC ගෙන් උඩු ගං අතට B අවල බෝයාවක් ගස මැද සවි කර ඇත. (යාබද රූපය බලන්න.) ජලයට සාපේක්ෂව v ($> u$) වේගයෙන් චලනය වන බෝවටුවක් A සිට ආරම්භ කර B වෙත ළඟා වන තෙක් චලනය වේ. ඊළඟට එය B සිට C දක්වා චලනය වේ. A සිට B දක්වාත් B සිට C දක්වාත් බෝවටුවේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



A සිට B දක්වා චලිතයේ දී බෝවටුවේ වේගය $\frac{1}{2}(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u)$ බව පෙන්වා, B සිට C දක්වා චලිතයේ දී එහි වේගය සොයන්න.

එ නිසින්, AB හා BC පෙත් සඳහා බෝවටුව ගන්නා මුළු කාලය $\frac{a\sqrt{4v^2 - u^2}}{v^2 - u^2}$ බව පෙන්වන්න.

(a)



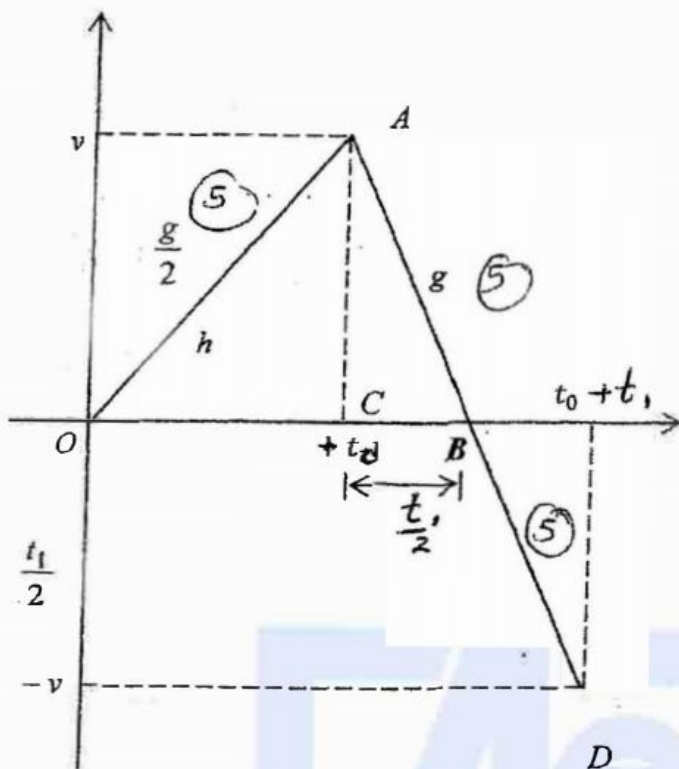
$$F = ma \text{ යොදමු.}$$

$$Q(3m) \text{ සඳහා } \downarrow 3mg - T = 3mf \quad (5)$$

$$P(m) \text{ සඳහා } \uparrow T - mg = mf \quad (5)$$

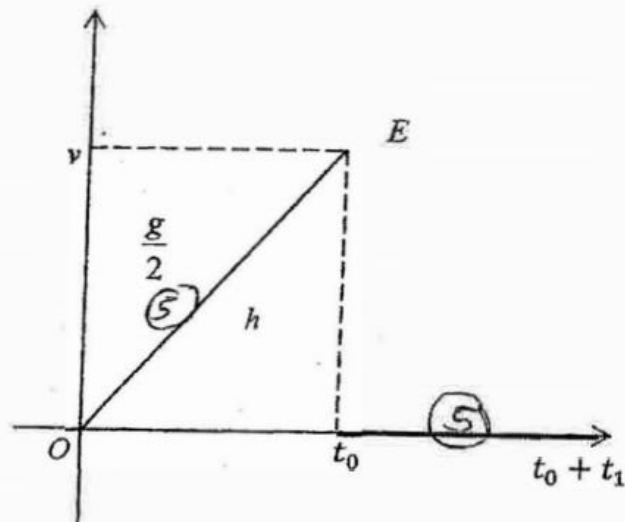
$$2mg = 4mf$$

$$\Rightarrow f = \frac{g}{2} \quad (5)$$



15

P අංශුව



10

Q අංශුව

40

OA හෝ OE ධාරිතාවය $= \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot v = h$ (1) 5

OA හෝ OE හි අනුක්‍රමණය $= \frac{v}{t_0} = \frac{g}{2}$ (2) 5

(1) $\times$ (2) $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot \frac{g t_0}{2} = h$ 5

$\Rightarrow t_0^2 = \frac{4h}{g}$

$\Rightarrow t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$

15

නවීන
Also (2) $\Rightarrow v = \frac{g}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$ 5

ප්‍රතිචාර මගින්

P හි ගුරුත්වය යටතේ පමණක් චලිතයට ගන්නා කාලය $= \frac{2v}{g}$

$$\therefore t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \leftarrow \quad (5)$$

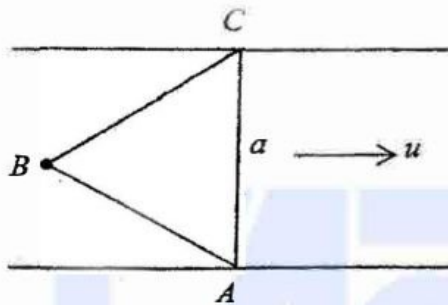
10

P ලගාවන උපරිම උස $= \frac{1}{2} \cdot v \cdot \frac{t}{2} = \frac{1}{2}h \quad \leftarrow \quad (5)$

ගෙවීම මට්ටමේ සිට උස $= h + h + \frac{h}{2} = \frac{5h}{2} \quad \leftarrow \quad (5)$

10

(b)



$$\underline{V}(B, W) = v$$

$$\underline{V}(W, E) = u \rightarrow$$

$$\underline{V}(B, E) = \begin{array}{c} \nearrow \frac{\pi}{6} \\ \text{---} \end{array} AB \text{ සඳහා} \quad \begin{array}{c} \nearrow \frac{\pi}{6} \\ \text{---} \end{array} BC \text{ සඳහා} \quad (5) \quad \text{දෙකම}$$

$$\underline{V}(B, E) = \underline{V}(B, W) + \underline{V}(W, E)$$

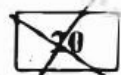
$$= \underline{V}(W, E) + \underline{V}(B, W)$$

$$\leftarrow \quad (5)$$

$$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}_i$$

$$= \overrightarrow{PR}_i, \quad i=1,2, \text{ සඳහා : මෙහි } AB // PR_1 \text{ හා } BC // PR_2.$$

$$(5) \quad (5)$$



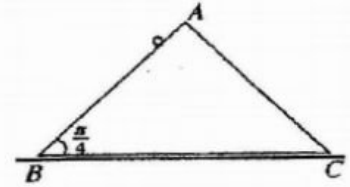
$$= a \frac{(PR_1 + PR_2)}{PR_1 \cdot PR_2}$$

$$= a \frac{\sqrt{4v^2 - u^2}}{(v^2 - u^2)}$$

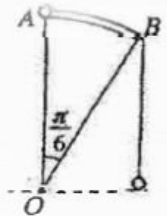
5

25

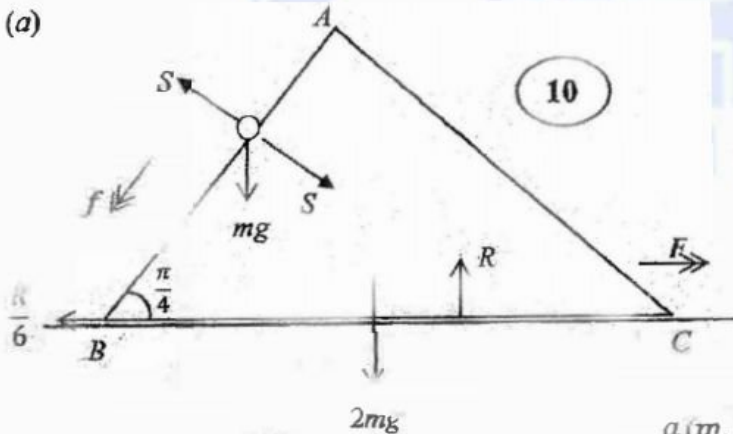
12. (a) රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය $2m$ වූ ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ සිරස් තරස්කඩකි. AB රේඛාව එය අයත් චක්‍රණයෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$ වේ. BC අයත් චක්‍රණයක රළු තිරස් ගෙඩීමක් මත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. AB අයත් චක්‍රණයක සුමට වේ. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි AB මත අල්වා තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. කුඤ්ඤය BC හි දිශාවට චලනය වන බවත් ගෙඩීම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන ඝර්ෂණ බලයෙහි විශාලත්වය $\frac{R}{6}$ වන බවත් දී ඇත; මෙහි R යනු ගෙඩීම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයයි. m හා g ඇසුරෙන්, R නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් වන සමීකරණ ලබා ගන්න.



- (b) රූපයේ දැක්වෙන OAB යනු OA සිරස් ව ඇති, O කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන අරය a වූ වෘත්ත බණ්ඩයකි. එය, ස්වකීය අක්ෂය තිරස් ව සවි කර ඇති සුමට සිලින්ඩරාකාර බණ්ඩයක අක්ෂයට ලම්භ හරස්කඩකි. B හි සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මගින් යන සැහැල්ලු අවිනාශ තත්කුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය $3m$ වූ P අංශුවකට ඇඳා ඇති අතර එහි අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවකට ඇඳා ඇත. ආරම්භයේ දී P අංශුව A හි අල්වා ඇති අතර Q අංශුව O හි තිරස් මට්ටමේ නිදහසේ ඵල්ලෙයි. තත්කුව තදව ඇතිව, මෙම පිහිටීමෙන්, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. OP රේඛා අත් සිරස සමඟ θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) කෝණයක් සාදන විට $2a\theta^2 = 3g(1 - \cos \theta) + g\theta$ බව හා තත්කුවේ ආතතිය $\frac{3}{4}mg(1 - \sin \theta)$ බව පෙන්වා, P අංශුව මත අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



(a)



10

$$\underline{a}(2m, E) = F \rightarrow$$

$$\underline{a}(m, 2m) = f \downarrow$$

$$\underline{a}(m, E) = \underline{a}(m, 2m) + \underline{a}(2m, E)$$

$$= \frac{\pi}{4} \rightarrow F$$

10

නව්‍ය පද්ධතිය.

6.3.2023 නව්‍ය

14

$F = ma$ යොදම :

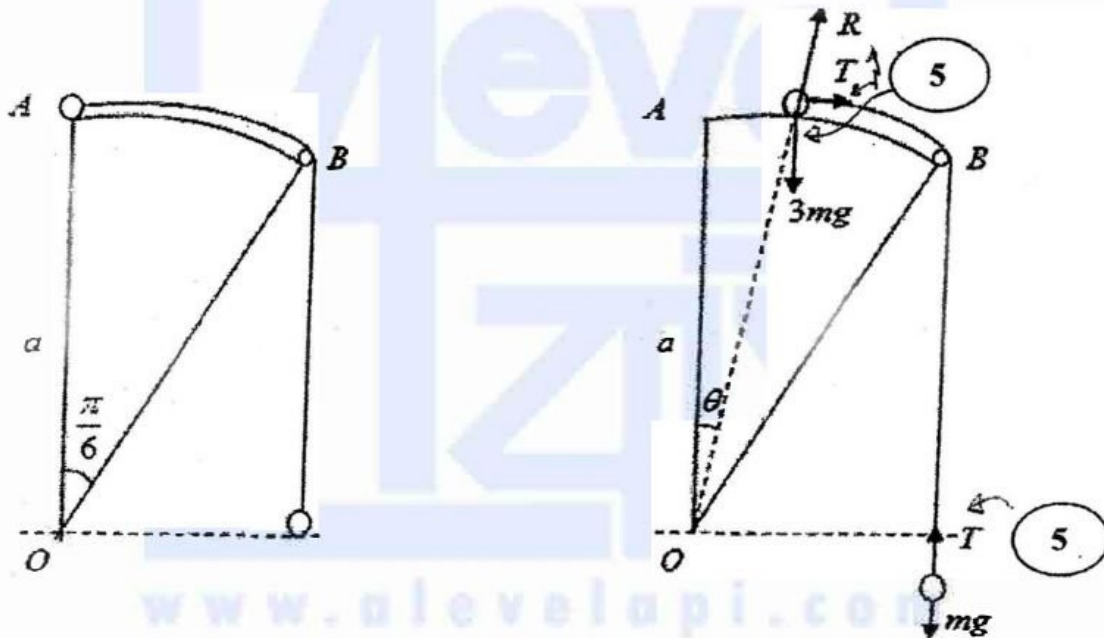
(i) P අංශුව සඳහා $\checkmark$ $mg \frac{\sqrt{2}}{2} = m \left(f - F \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$ (15)

(ii) පද්ධතිය සඳහා $\rightarrow$ $\frac{-R}{6} = 2mF + m \left(F - \frac{f}{\sqrt{2}} \right)$ (15)

(iii) පද්ධතිය සඳහා $\uparrow$ $R - 3mg = -m \frac{f}{\sqrt{2}}$ (10)

60

(b)



යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිතියෙන්

(15) $3mga = 3mga \cos \theta - mga \theta + \frac{1}{2}(3m)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(m)(a\dot{\theta})^2$ (25)
(PE=10, KE=10, Eqn=05)

$2a\dot{\theta}^2 = 3g(1 - \cos \theta) + g\theta$

5

40

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

P සඳහා $\searrow$ $T + 3mg \sin \theta = 3mf$ ----- (1) (15) වැට් 0

Q සඳහා $\downarrow$ $mg - T = mf$ ----- (2) (10) වැට් 0

By (1) හා (2) න්,

$$3mg - 3T = T + 3mg \sin \theta$$

$$4T = 3mg(1 - \sin \theta)$$

$$T = \frac{3mg}{4}(1 - \sin \theta)$$

(5)

30

$\underline{F} = m\underline{a}$, P සඳහා යෙදීමෙන්

$\swarrow$ $3mg \cos \theta - R = 3ma\theta^2$ (10)

$R = 3mg \cos \theta - \frac{3m}{2}\{3g(1 - \cos \theta) + g\theta\}$ $\leftarrow$ (10)

$$= \frac{3mg}{2}(2\cos \theta - 3 + 3\cos \theta - \theta)$$

$$= \frac{3mg}{2}(5\cos \theta - \theta - 3)$$

20

සටහන :

$0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ සඳහා පෘෂ්ඨයෙන් P ඉවත් නොවේ.

$$R|_{\theta=0} = 3mg > 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{3mg}{2}(-5\sin \theta - 1) < 0 \text{ for } 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$R|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{3mg}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - 3\right) > 0$$

පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් නොවේ

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4\pi g$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අවල O ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ගැට ගසා ඇත. P අංශුව, O හි නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යය පසු කර යන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න; මෙහි $OA = a$ වේ.

තන්තුවේ දිග $x(x \geq a)$ යන්න $\ddot{x} + \frac{4g}{a} \left(x - \frac{5a}{4} \right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

$X = x - \frac{5a}{4}$ ලෙස ගෙන, ඉහත සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $\omega(>0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

$\dot{X}^2 = \omega^2 (c^2 - X^2)$ බව උපකල්පනය කරමින්, මෙම සරල අනුවර්තී වලිනයෙහි විස්තාරය වන c සොයන්න.

P අංශුව ලඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය L යැයි ගනිමු. A සිට L දක්වා වලනය වීමට P මගින් ගනු ලැබූ කාලය $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right\}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව L හි තිබෙන මොහොතේ දී ස්කන්ධය λm ($1 \leq \lambda < 3$) වූ තවත් අංශුවක් සිරුවෙන් P ට ඇඳුනු ලැබේ. ස්කන්ධය $(1 + \lambda)m$ වූ සංයුක්ත අංශුවේ වලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \frac{4g}{(1 + \lambda)a} \left\{ x - (5 + \lambda) \frac{a}{4} \right\} = 0$ බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත අංශුව, $(3 - \lambda) \frac{a}{4}$ විස්තාරය සහිත පූර්ණ සරල අනුවර්තී වලිනයේ යෙදෙන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

ගුරුත්වය යටතේ පමණක් P හි වලිතය සඳහා

O සිට A දක්වා :

$$\downarrow v^2 = 2ga \Rightarrow v = \sqrt{2ag} \quad \leftarrow (5)$$

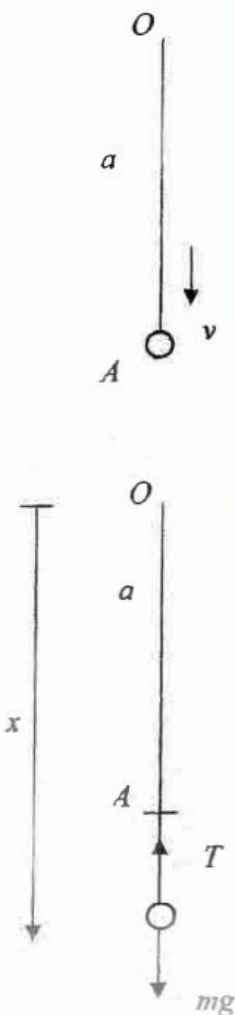
$$\text{තන්තුවේ ආතතිය : } T = \frac{4mg(x-a)}{a}, \quad x \geq a \quad (5)$$

$$F = ma : -T + mg = m\ddot{x} \quad \leftarrow (5)$$

$$T \text{ ඉවත් කිරීමෙන් : } -4mg \frac{(x-a)}{a} + mg = m\ddot{x} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{4g}{a}(x-a) = \frac{4g}{a} \cdot \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{4g}{a} \left(x - \frac{5a}{4} \right) = 0 \quad \text{----- (1)} \quad (5)$$



5

5

5

5

5

5

5

4

25

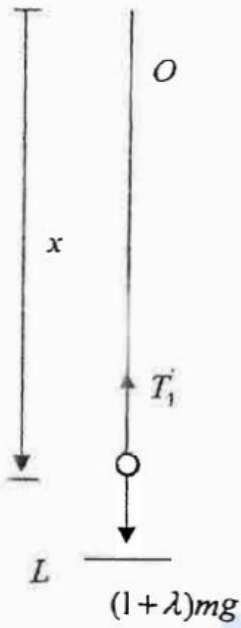


13

5

5

5



$$T_1 = \frac{4mg(\dot{x} - a)}{a}$$

↓ ඔහුගේ අංශුව සඳහා $F = ma : (1 + \lambda)mg - T_1 = (1 + \lambda)m\ddot{x}$

$$(1 + \lambda)mg - \frac{4mg}{a}(x - a) = (1 + \lambda)m\ddot{x}$$

10

5

7/1 දැක්ම

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1 + \lambda)a}(x - a) - g = 0$$

5

2/1 දැක්ම

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1 + \lambda)a} \left\{ x - a - (1 + \lambda) \frac{a}{4} \right\} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1 + \lambda)a} \left\{ x - (5 + \lambda) \frac{a}{4} \right\} = 0$$

5

25



$$\text{Centre } C_1 : x = OC_1 = (5 + \lambda) \frac{a}{4}$$

$$C_1L = 2a - (5 + \lambda) \frac{a}{4}$$

5

$$= (3 - \lambda) \frac{a}{4}$$

5

$$\text{නව විස්තාරය } c_1 = (3 - \lambda) \frac{a}{4} (> 0) \therefore \lambda < 3.$$

සම්පූර්ණ සරල අනුවර්ති චලිතය $\Leftrightarrow$

$$AC_1 \geq c_1$$

← නව විස්තාරය

16

$$(5 + \lambda) \frac{a}{4} - a \geq (3 - \lambda) \frac{a}{4}$$

$$5 + \lambda - 4 \geq 3 - \lambda$$

$$\lambda \geq 1$$

5

25

විකල්ප ක්‍රමය

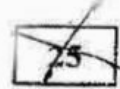
$X = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ යැයි ගනිමු ; මෙහි A හා B නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$$\Rightarrow \dot{X} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t. \quad (5)$$

$$t = 0 \text{ හා } x = a \text{ වන විට } X = -\frac{a}{4} \text{ හා } \dot{X} = V = \sqrt{2ga}. \quad (5) \quad (5)$$

$$\therefore -\frac{a}{4} = A, V = B\omega \Rightarrow B = \frac{V}{\omega} \quad (5) \quad (5)$$

එසඳුම: $X = -\frac{a}{4} \cos \omega t + \frac{V}{\omega} \sin \omega t.$



අවකලනයෙන්: $\dot{X} = \frac{a\omega}{4} \sin \omega t + V \cos \omega t. \quad (5)$

පහත්ම ලක්ෂ්‍යය L ට ළඟාවන්නේ $\dot{X} = 0$ විට දීය. (5)

පළමු වරට $t = t_1$, විට ශුන්‍ය කියමු.

$$\text{එවිට } \tan \omega t_1 = -\frac{4V}{a\omega} \quad (5)$$

$$\omega t_1 = \pi - \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{4V}{a\omega}; \text{ මෙහි } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$(5)$$

සරළ අනුවර්ත චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය $x = \frac{5a}{4}$ හෝ $AC = \frac{a}{4}$ වේ. (5)

$$\frac{a}{4} = c \cos \alpha = \frac{c(a\omega)}{\sqrt{16V^2 + a^2\omega^2}}$$

$$= c \cdot \frac{2\sqrt{ga}}{\sqrt{16 \times 2ga + 4ga}} = \frac{1}{3}c \quad (5)$$

$$\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$$

තව ද, ඉහතින්

$$\omega t_1 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left\{ \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

5

60

35

14. (a) O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ; මෙහි O, A හා B එක රේඛයක වේ. C යනු $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද D යනු $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද යැයි ගනිමු. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{AD}$ ප්‍රකාශ කර, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ බව පෙන්වන්න. P හා Q යනු පිළිවෙළින්, AB හා OD මත $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{OQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{OD}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු; මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ. $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ බව පෙන්වන්න.
- (b) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක $AB = 2$ m හා $AD = 1$ m යැයි ද $\hat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ යැයි ද ගනිමු. තව ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු. විශාලත්ව නිව්ටන් 5, 5, 2, 4 හා 3 වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC, DA හා BE දිශේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවන්ට ක්‍රියා කරයි. ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ ට සමාන්තර බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය සොයන්න. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව B සිට $\frac{3}{2}$ m දුරක දී දික්කරන ලද AB ට හමුවන බවත් පෙන්වන්න. දැන් C හරහා ක්‍රියා කරන අමතර බලයක් ඉහත බල පද්ධතියට එකතු කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ දිශේ වන පරිදි ය. අමතර බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(a)

$$\overrightarrow{OA} = \underline{a} \text{ හා } \overrightarrow{OB} = \underline{b} \text{ යැයි ගනිමු.}$$

$$\text{ඔව්ව } \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{\underline{b}}{3} \text{ හා } \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} \rightarrow 5$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\underline{r} = -\underline{a} + \frac{\underline{b}}{2} - \frac{\underline{a}}{2} = -\underline{a} + \frac{\underline{b}}{3} \quad (2) \rightarrow 5$$

$$= \frac{3}{2} \left(-\underline{a} + \frac{\underline{b}}{3} \right) \quad (1) \rightarrow 5$$

$$(1) \text{ හා } (2) \text{ මගින්, } \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \leftarrow 5$$

25

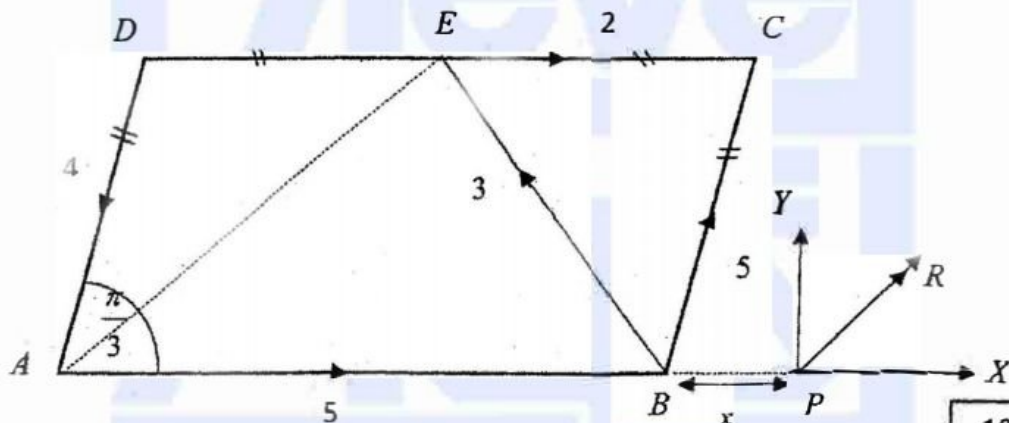
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} \\
 &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OC} + (1-\lambda)\overrightarrow{OD} \\
 &= -\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \quad (5) \\
 &= -\lambda(\underline{b} - \underline{a}) - \underline{a} + \underline{c} \quad (5) \\
 &= (\lambda - 1)\underline{a} - \lambda\underline{b} + \frac{b}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CQ} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ} \\
 &= -\overrightarrow{OC} + (1-\lambda)\overrightarrow{OD} \quad (5) \\
 &= -\frac{b}{3} + (1-\lambda)\frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a}) \quad (5) \\
 &= \frac{1}{2}[(\lambda - 1)\underline{a} - \frac{3}{2}\underline{b} + \underline{b} - \lambda\underline{b}] \\
 &= \frac{1}{2}[(\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}] \quad (4)
 \end{aligned}$$

(3) හා (4) මගින්, $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$

35

(b)



දිශාවට විභේදනයෙන් // to $\overrightarrow{AE}$: $-4 \cos \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} + 5 \cos \frac{\pi}{6} + 5 \cos \frac{\pi}{6} \quad (10)$

$$= 4\sqrt{3}N \quad (5)$$

AE ට ලම්භව විභේදනයෙන් $\perp$ $\overrightarrow{AE}$: $3 - 4 \sin \frac{\pi}{6} + 5 \sin \frac{\pi}{6} - 5 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{6} \quad (10)$

$$= 3 - 2 + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} - 1$$

$$= 0 \quad (5)$$

සම්පූර්ණව පරාසයේ විශාලත්වය $R = 4\sqrt{3}N$ හා $\overrightarrow{AE}$ ට සමාන්තර වේ.

10

40

විකල්ප ක්‍රමය

$$AB \text{ දිශේ} \rightarrow X = 5 + \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = 6N$$

10

$$AB \text{ ලම්භව} \uparrow Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(5+3) - \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}N$$

10

$$\frac{Y}{X} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5

$$\text{සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය } R = 2\sqrt{3}\sqrt{3+1} = 4\sqrt{3}N,$$

5

එහි ක්‍රියා රේඛාව AB සමඟ සාදන කෝණය $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \therefore$ එය AE ට සමාන්තර වේ.

5

40

අපි සම්ප්‍රයුක්තයට දික් කරන ලද AB හමුවන ලක්ෂ්‍යය P යැයි ගනිමු.

B ඔර්ණ ගැනීමේදී

$$Yx = 4 \times 2 \sin \frac{\pi}{3} - 2 \times 1 \sin \frac{\pi}{3}$$

10

$$2\sqrt{3}x = 3\sqrt{3}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ m.}$$

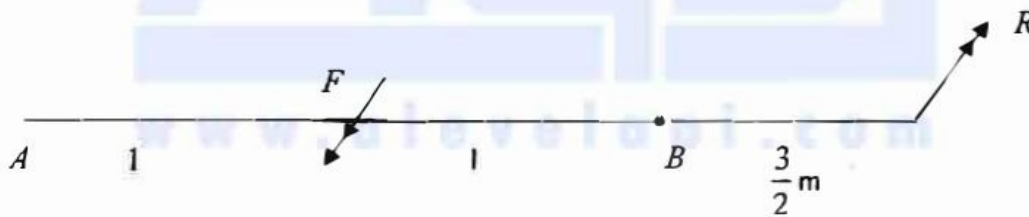
5

15

එවිට BP , $x = \frac{3}{2} \text{ m.}$

අතිරේක බලය $\vec{EA}$ ට සමාන්තර වේ.

5



$$R \times \left(2 + \frac{3}{2}\right) \sin 30^\circ = F \cdot 1 \sin 30^\circ$$

15

$$4\sqrt{3} \times \frac{7}{2} = F$$

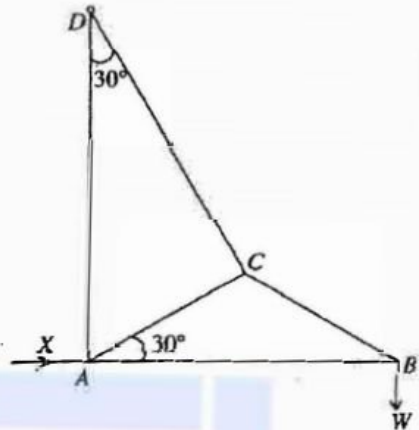
$$F = 14\sqrt{3}N.$$

5

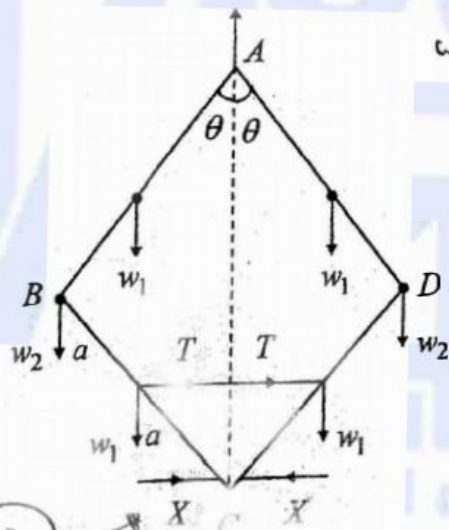
25

15. (a) එක එකක බර w_1 වූ සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක්, $ABCD$ රොම්බසයක් සාදන පරිදි, ඒවායේ අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. $\hat{BAD} = 2\theta$ වන පරිදි BC හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් යා කර ඇත. B හා D එක් එක් සන්ධිය සමාන w_2 බාර දරයි. පද්ධතිය, A සන්ධියෙන් සමමිතික ලෙස එල්ලෙමින්, සැහැල්ලු දණ්ඩ තිරස් ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතියි. සැහැල්ලු දණ්ඩෙහි තෙරපුම $2(2w_1 + w_2) \tan \theta$ බව පෙන්වන්න.

(b) යාබද රූපයෙන්, අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CD, AC හා AD සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. $AC = CB$ හා $\hat{BAC} = 30^\circ = \hat{ADC}$ බව දී ඇත. රාමු සැකිල්ල D හි දී සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. B සන්ධියේ දී W බරක් එල්ලා AB සිරස් ව ද AD සිරස් ව ද ඇතිව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හි දී ක්‍රියා කරන විශාලත්වය X වූ තිරස් බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් B, C හා A සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න. ඒ නමින්, X හි අගය හා සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වමින් සොයන්න.



(a)



ඔබ වලට ලකුණු (10) වැන්න

ප්‍රායෝගිකව නිවැරදි වූ බව පෙන්වා දෙන්න (X ආශ්‍රයෙන්)

සමමිතිකව

5

එක් එක් බර දණ්ඩේ දිග $2a$ යැයි ගනිමු.

$$B \rightarrow BC \text{ සඳහා } X \times 2 \cos \theta - w_1 \times a \sin \theta - T \times a \cos \theta = 0. \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2X - T = w_1 \tan \theta$$

$\rightarrow AB$ හා BC සඳහා

$$X \times 4a \cos \theta + 2w_1 \times a \sin \theta + w_2 \times 2a \sin \theta - T \times 3a \cos \theta = 0. \quad (2)$$

$$\Rightarrow 4X - 3T = -2(w_1 + w_2) \tan \theta$$

$$\begin{aligned}
 (1) \times 2 - (2) &\Rightarrow T = 2w_1 \tan \theta + (2w_1 + w_2) \tan \theta \\
 &= (4w_1 + 2w_2) \tan \theta \\
 &= 2(2w_1 + w_2) \tan \theta
 \end{aligned}$$

10

65

(b)

දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතති/තෙරපුම්
BC(bc)	2W	ආතති
AB(ca)	$\sqrt{3}W$	තෙරපුම්
CD(bd)	$\sqrt{3}W$	ආතති
AC(dc)	W	ආතති
AD(de)	$\frac{W}{2}$	තෙරපුම්
$X(ea) = \frac{W\sqrt{3}}{2}$		

10

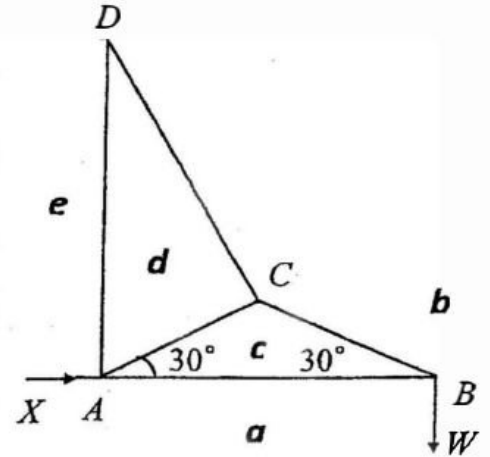
10

10

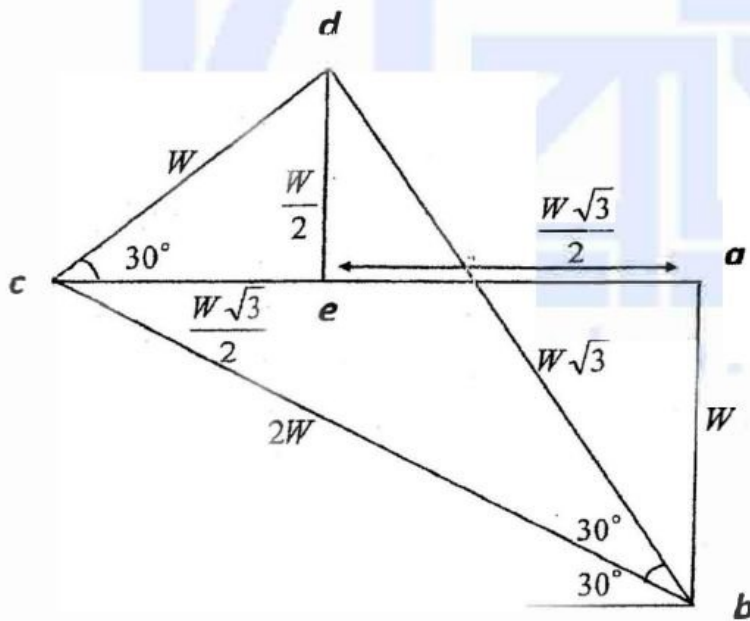
10

10

5



ප්‍රධාන අවස්ථාවේ වස්තු



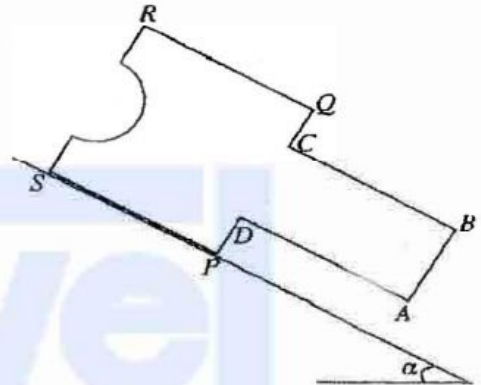
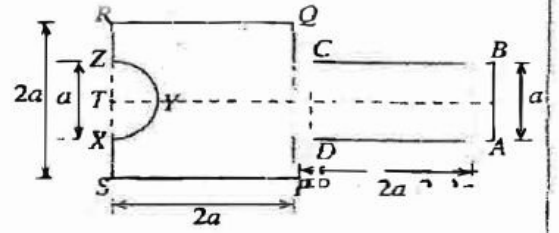
30

ප්‍රධාන අවස්ථාවේ (10) අවස්ථාවේ
කොටස් කොටස්

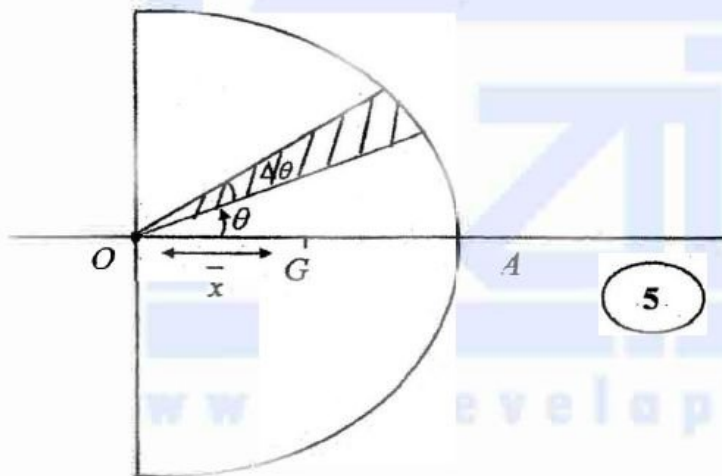
85

16. අරය r හා O කේන්ද්‍රය වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{4r}{3\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ඒකාකාර තල ආස්තරයක් සාදා ඇත්තේ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් $PQRS$ සමචතුරස්‍රයකට DC හා PQ ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සම්පාත වෙමින් එක ම රේඛාවේ පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කර, RS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන T හි කේන්ද්‍රය ඇති අරය $\frac{a}{2}$ වන XYZ අර්ධ වෘත්තාකාර පෙදෙසක් ඉවත් කිරීමෙනි. $AB = a$ හා $AD = PQ = 2a$ බව දී ඇත. L ආස්තරයෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත, RS සිට ka දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = \frac{238}{3(48 - \pi)}$ වේ.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ආස්තරය තිරසරව a කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත ස්ථායී තත්ත්වයේ පිරිසිදු P ලක්ෂ්‍යය S ට පහළින් පිහිටන පරිදි PS දාරය උෂ්ණ බැවුම් රේඛාවක් මත ද ඇතිව සමතුලිතව පිහිටයි. $\tan \alpha < (2 - k)$ හා $\mu \geq \tan \alpha$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු ආස්තරය හා ආනත තලය අතර සර්පණ සංගුණකයයි.



5

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට OA මත පිහිටයි.

5

ඒකක වර්ග ඵලයක ස්කන්ධය σ යැයි ගනිමු.

$$\Delta m = \frac{1}{2} r^2 (\Delta \theta) \sigma$$

$$\textcircled{5} \quad \bar{x} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \sigma \frac{2}{3} r \cos \theta d\theta}{\frac{\pi}{2} r^2 \sigma} \quad \textcircled{10}$$

$$= \frac{2r}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{2r}{3\pi} \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{2r}{3\pi} \left[2 \sin \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{4r}{3\pi} \quad \textcircled{5}$$

සමස්ත කේන්ද්‍රයට දුර = $\frac{4r}{3\pi}$

40

9 විද්‍යාත්මක සාහිත්‍ය

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට RS සිට දුර (→)
	$2a^2\sigma$	$3a$
	$4a^2\sigma$	a
	$\frac{1}{2} \cdot \pi \times \frac{a^2}{4} \sigma$	$\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2a}{3\pi}$
	$\left(6 - \frac{\pi}{8}\right) a^2 \sigma$	$\bar{x}_1$

10

10

10

5

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය අර්ධ දැක්වීමෙන්,

$$\frac{a^2\sigma}{8}(48-\pi)\bar{x}_1 = 2a^2\sigma \times 3a + 4a^2\sigma \times a - \frac{\pi a^2}{8}\sigma \times \frac{2a}{3\pi}$$

10

$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \left(10 - \frac{1}{2}\right)a$$

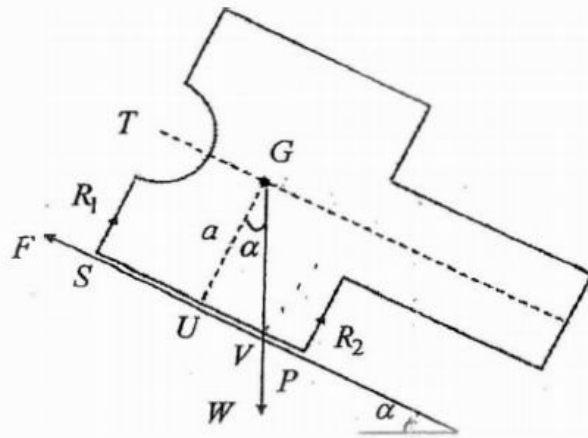
$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \frac{119}{12}a$$

$$\therefore \bar{x}_1 = \frac{238}{3(48-\pi)}a$$

5

50

ඉහත සඳහන් කරුණු භාවිත කරවා ගෙන
ප්‍රශ්න 10 සඳහා පිළිතුරු ලියන්න



10
 ඔබේ පිළිතුරු

R_1, R_2 හෝ R
 නේදා වෙයි
 ඉතිරි වෙයි

තලය සමඟ PS ස්පර්ශව තිබීම සඳහා $UV < UP$ විය යුතුය.

10

එනම්, $a \tan \alpha < 2a - ka$.

$\Rightarrow \tan \alpha < (2 - k). (k < 2.)$

10

$R_1 + R_2 = w \cos \alpha$

10

$F = w \sin \alpha$

5

L නොලිස්සන බැවින් $\mu \geq \frac{F}{R_1 + R_2}$.

10

$\Rightarrow \mu \geq \tan \alpha.$

5

60

www.alevelapi.com

17. (a) නොනැඹුරු සහකාකාර A දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත 1, 2, 3, 3, 4, 5 පෙන්වයි. A දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඵෙකය 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. මුහුණත් මත වූ සංඛ්‍යා හැරුණු විට, අන් සෑම අවුරකින් ම A ට සර්වසම තවත් B දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත 2, 2, 3, 4, 4, 5 පෙන්වයි. B දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඵෙකය 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

දැන්, A හා B දාදු කැට දෙක පෙට්ටියකට දමනු ලැබේ. එක් දාදු කැටයක් සසම්භාවී ලෙස පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගෙන දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඵෙකය 6 බව දී ඇති විට, පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගත් දාදු කැටය, A දාදු කැටය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) $x_1, x_2, \dots, x_n$ යන සංඛ්‍යා n වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_1 හා σ_1 ද, $y_1, y_2, \dots, y_m$ යන සංඛ්‍යා m වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_2 හා σ_2 ද වේ. මෙම සියලු ම $n + m$ සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_3 හා σ_3 යැයි ගනිමු.

$$\mu_3 = \frac{n\mu_1 + m\mu_2}{n + m} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$$d_1 = \mu_3 - \mu_1 \text{ ලෙස ගනිමු. } \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_3)^2 = n(\sigma_1^2 + d_1^2) \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$$d_2 = \mu_3 - \mu_2 \text{ ලෙස ගැනීමෙන්, } \sum_{j=1}^m (y_j - \mu_3)^2 = m(\sigma_2^2 + d_2^2) \text{ සඳහා එබඳු ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.}$$

$$\sigma_3^2 = \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + (nd_1^2 + md_2^2)}{n + m} \text{ බව අපෝහනය කරන්න.}$$

අලුත් පොතක් ප්‍රකාශයට පත් කිරීමෙන් පසු යළිමු දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 2.3 ක් ද විචලතාව 0.8 ක් ද විය. යළිමු දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 1.7 ක් ද විචලතාව 0.5 ක් ද විය. යළිමු දින 200 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

(a) A පාදු කැටය එක්වරක් විසිකළ විට n සංඛ්‍යාව ලැබුණු කළ මුහුණත ලැබීමේ සම්භාවිතාව $P(n)$ පහත දැක්වේ.

n	1	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$i = 1, 2$ සඳහා i වන විසිකිරීමේදී ලැබෙන සංඛ්‍යාව X_i යැයි ගනිමු.

$$\text{එවිට } P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 1 \text{ හා } X_2 = 5) + P(X_1 = 5 \text{ හා } X_2 = 1)$$

$$+ P(X_1 = 2 \text{ හා } X_2 = 4) + P(X_1 = 4 \text{ හා } X_2 = 2)$$

$$+ P(X_1 = 3 \text{ හා } X_2 = 3).$$

$$= 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{9}$$

15

5

20

B ලද කැටය සඳහා X , වෙනුවට Y , යොදමු.

n	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{එවිට } P(Y_1 + Y_2 = 6) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

15

$$= \frac{1}{4}$$

5

20

වෙනි ප්‍රශ්නය

$$P(A | \text{sum} = 6) = \frac{P(\text{sum} = 6 | A) P(A)}{P(\text{sum} = 6 | A) P(A) + P(\text{sum} = 6 | B) P(B)}$$

10

$$= \frac{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{8}{17}$$

5

5

10

30

$$(b) \mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \mu_2 = \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{m}$$

5

$$\text{එවිට } \mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j}{m+n}$$

5

$$= \frac{n\mu_1 + m\mu_2}{m+n}$$

5

15

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_3)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu_3)^2$$

5

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1 - d_1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \{ (x_i - \mu_1)^2 + 2d_1(x_i - \mu_1) + d_1^2 \} \quad (5) \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2 - 2d_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1) + \sum_{i=1}^n d_1^2 \quad (5) \\
&= n\sigma_1^2 + nd_1^2 \left\{ \because \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1) = 0 \text{ and } \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2}{n} = \sigma_1^2 \right\} \quad (5) \\
&= n(\sigma_1^2 + d_1^2). \quad (5)
\end{aligned}$$

30

එලෙසම, $\sum_{j=1}^m (y_j - \mu_3)^2 = m(\sigma_2^2 + d_2^2)$, මෙහි $d_2 = \mu_3 - \mu_2$. (5)

05

$$\begin{aligned}
\sigma_3^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_3)^2 + \sum_{j=1}^m (y_j - \mu_3)^2}{m+n} \quad (5) \\
&= \frac{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)}{m+n} \\
&= \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + n(d_1^2 + md_2^2)}{m+n} \quad (5)
\end{aligned}$$

10

පළමු දින 100 සඳහා:

$$n=100, \mu_1 = 2.3, \sigma_1^2 = 0.8$$

දෙවන දින 100 සඳහා :

$$m=100, \mu_2 = 1.7, \sigma_2^2 = 0.5$$

$$\text{ඉහතින්, } \mu_3 = \frac{230+170}{200} = 2.$$

(5)

(5)

$d_1 = -0.3$, හා $d_2 = 0.3$ වේ.

$$\sigma_3^2 = \frac{100}{200} [0.8^2 + 0.5^2 + (0.3)^2 + (0.3)^2] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} [0.64 + 0.25 + 0.09 \times 2]$$

$$= \frac{1.07}{2} = 0.535$$

$$\sigma_3 = \sqrt{0.535}$$

$$\frac{1}{2} [1.3 + 0.18] = \frac{1.48}{2} = 0.74$$

$$(5) \quad \sigma_3 = \sqrt{0.74}$$

20

