WWW.ALEVELAPI.COM

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - **2016**

10 - සංයුක්ත ගණිතය

<u>ලකුණු බෙදීයාම</u>

- I පත්‍රය

A කොටස - $10 \times 25 = 250$

B කොටස - $05 \times 150 = 750$

එකතුව - 1000 / 10

- I පත්‍රය - අවසාන ලකුණු - 100

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, ව.පැ. $= \sum_{r=1}^{1} r(r+1) = 2$ හා

$$ද.පැ. = \frac{1}{3}(1+1)(1+2) = 2.$$ (5)

ඒනයින් $n=1$, විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන, ප්‍රතිඵලය $n=p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ (5)

දැන්, $\sum_{r=1}^{p+1} r(r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(r+1) + (p+1)[(p+1)+1]$ (5)

$$= \frac{p}{3}(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2)$$ (අභ්‍යුහන කල්පිතය මගින්)

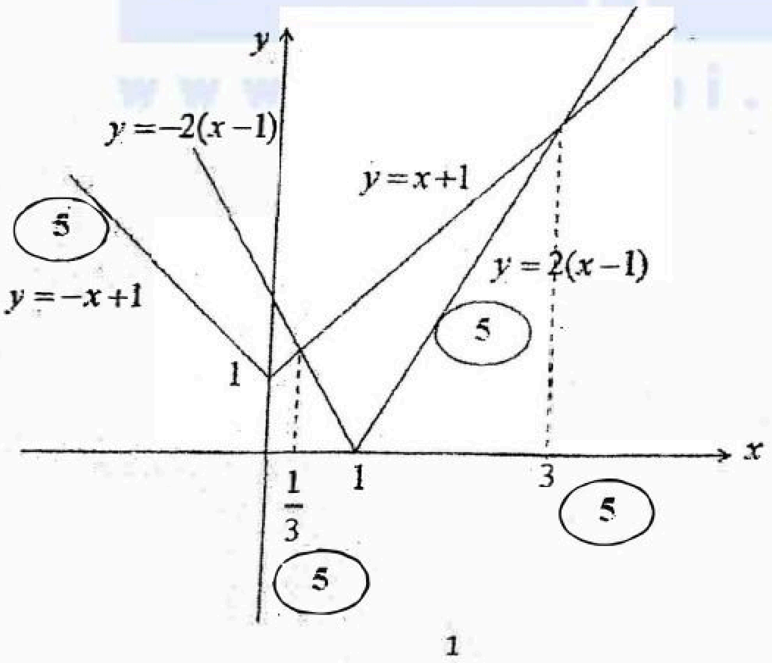
$$= \frac{(p+1)}{3}(p+2)(p+3).$$ (5)

ඒනයින්, $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම් $n=p+1$ සඳහාද එය සත්‍ය වේ. $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව කලින් පෙන්වා ඇත. එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

(5) **25**

---

2. එක ම රූප සටහනක $y = |x| + 1$ හා $y = 2|x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x| + 1 > 2|x-1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

[illegible], $|x|+1>2|x-1| \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$. (5)

25

විකල්ප ක්‍රමය I

(i) අවස්ථාව $x \geq 1$ $x+1>2(x-1) \Leftrightarrow x<3$. (5)

එබැවින්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් වන්නේ, $1 \leq x<3$ තෘප්ත කරන x අගයන්ය.

(ii) අවස්ථාව $0<x<1$ $x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$. (5)

එබැවින්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් වන්නේ $\frac{1}{3}<x<1$ තෘප්ත කරන x අගයන්ය.

(iii) අවස්ථාව $x \leq 0$ $-x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>1$

මෙම විසංවාදය මගින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැති බව ගම්‍ය වේ.

එබැවින්, විසඳුම් කුලකය $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{3}<x<3\right\}$ වේ. (5)

15

විකල්ප ක්‍රමය II

$|x|+1>2|x-1|$

$\Leftrightarrow x^2+2|x|+1>4(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2(|x|+4x)+3<0$

$x>0$

$3x^2-10x+3<0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3)<0$ (5)

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$ (5)

$x<0$

$3x^2-6x+3<0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2<0$ (5)

මෙය විය නොහැක.

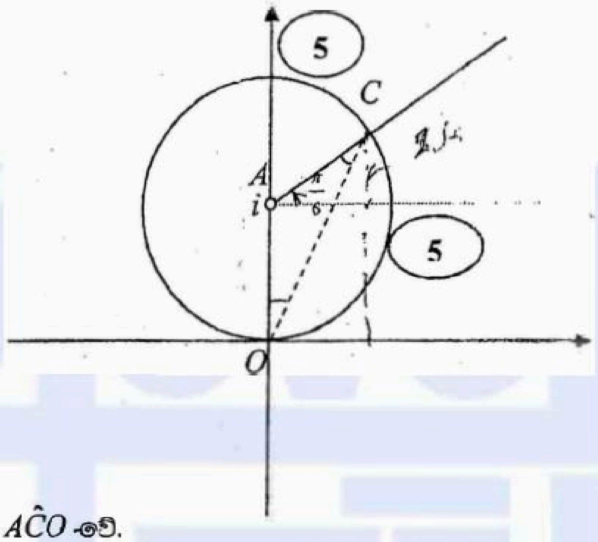
15

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $|z - i| = 1$ (ii) $\text{Arg}(z - i) = \frac{\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් අඳින්න. මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් සොයන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ.



$O\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$ වේ.

$OA = AC$, බැවින් $A\hat{O}C = A\hat{C}O$ වේ.

ඒනයින් $A\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$ හා OC x- අක්ෂය සමග සාදන කෝණය $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ (5)

තවද, $OC = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$. (5)

ඒනයින් අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. (5)

25

විකල්ප ක්‍රමය

$y_C = 1 + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$ (5)

$x_C = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5)

$\therefore z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (5)

$r = \sqrt{3}$ හා $\theta = \frac{\pi}{3}$ ලෙස ගත හැක.

15

A level lapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

4. එක් එක් සංඛ්‍යාංකය එක් වරක් පමණක් භාවිත කරයි නම්, $1, 2, 3, 4$ හා 5 යන සංඛ්‍යාංකවලින්, සංඛ්‍යාංක පහකින් යුත් වෙනස් සංඛ්‍යා කීයක් සෑදිය හැකි ද?

මෙම සංඛ්‍යාවලින් (i) කොපමණක් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා වේ ද?

(ii) කොපමණක 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක එක ළඟ තිබේ ද?

5 4 3 2 1

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 5!$ (5)

$= 120.$ (5)

(i) අවසාන සංඛ්‍යාංකය 2 හෝ 4 විය යුතුය.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 2 \times 4! = 48$ (5)

(5)

(ii) [3][4] එම පිළිවෙලට

ආකාර ගණන $= 4!$

[4][3] එම පිළිවෙලට

ආකාර ගණන නැවත $4!$ වේ.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 2 \times 4! = 48$

(5)

25

5. $\alpha > 0$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}} = 16$ වන පරිදි වූ α හි අගය සොයන්න.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

(5) (5)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{(1+\cos(\alpha x))} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}$$

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{2x^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\right)^2 \times \frac{\alpha^2}{2} \times \frac{\left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

(5)

$$= 1^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{4}{2} \quad = \alpha^2$$ (5)

$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \ (\because \alpha > 0)$$

(5)

25

<u>විකල්ප ක්‍රමය</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}}$$

(5) (5)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}} \times \frac{\left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{x^2} \cdot \left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\frac{\alpha x}{2}}\right)^2 \times \frac{\alpha^2}{4} \times \left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)$$

(5)

$$= 1^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} \cdot 4 = \alpha^2$$ (5)

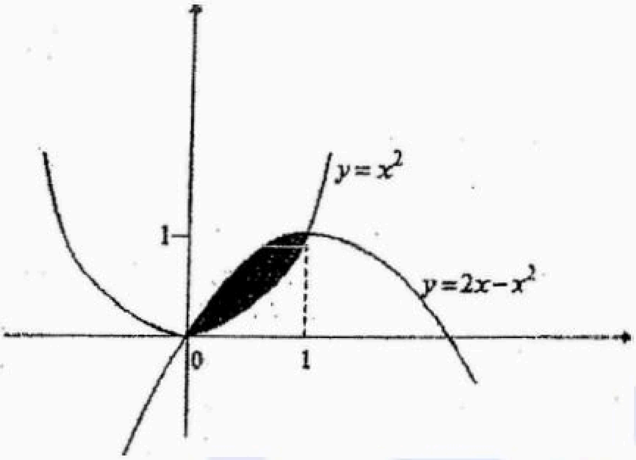
$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \quad (\because \alpha > 0)$$

(5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

6. $y = x^2$ හා $y = 2x - x^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සඳහා $x^2 = 2x - x^2$

$$x(x-1) = 0$$

$x = 0$ හෝ $x = 1$.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= \int_0^1 \left[(2x - x^2) - x^2\right] dx$ (15) 05-limits 05- identifying upper and lower curves. 05-expression

$$= 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$ (5)

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$ (5)

$= \frac{1}{3}$ වර්ග ඒකක

25

7. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 3\sin^2\frac{\theta}{2}$, $y = \sin^3\theta$ යනා පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.

$\frac{dy}{dx} = \sin 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

C මත වූ P ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයෙහි අනුක්‍රමණය $\frac{\sqrt{3}}{2}$ වේ නම්, P ට අනුරූප θ පරාමිතියෙහි අගය සොයන්න.

Alevel උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$\frac{dy}{d\theta} = 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \times \frac{1}{2} = 3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$ (5)

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$$ (5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$ (5)

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sin 2\theta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (5)

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$ (5)

25

---

8. මූල ලක්ෂ්‍යයත්, $2x + 3y - k = 0$ හා $x - y + 1 = 0$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයත් හරහා යන සරල රේඛාව l යැයි ගනිමු; මෙහි $k\ (\neq 0)$ නියතයකි. l හි සමීකරණය k ඇසුරෙන් සොයන්න.
$(1, 1)$ හා $(3, 4)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක l හි එක ම පැත්තේ වන බව දී ඇත. $k < 18$ බව පෙන්වන්න.

www.alevelapi.com

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා , $l:\ 2x + 3y - k + \lambda(x - y + 1) = 0$ (5)

l, මූලය හරහා යන බැවින් $-k + \lambda = 0$

$\therefore \lambda = k$ (5)

$\therefore$ l හි සමීකරණය $(2+k)x + (3-k)y = 0$ (5)

$(1, 1)$ හා $(3, 4)$ එකම පැත්තේ වේ.

$\Rightarrow [(2+k)+(3-k)][3(2+k)+4(3-k)] > 0$ (5)

$\Rightarrow \qquad 5(18-k) > 0$

$\Rightarrow \qquad k < 18.$ (5)

25

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

විකල්ප ක්‍රමය

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා, $l:\ x-y+1+\lambda(2x+3y-k)=0$. (5)

l, මූලය හරහා යන බැවින්

$1-\lambda k=0$

$\Rightarrow \lambda k=1$

$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{k}.\ (\because k\neq 0)$ (5)

$\therefore$ l හි සමීකරණය $\left(1+\frac{2}{k}\right)x+\left(\frac{3}{k}-1\right)y=0$ වේ. (5)

$(1,1)$ හා $(3,4)$ එකම පැත්තේ වේ.

$\Rightarrow \left[1+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}-1\right]\left[3+\frac{6}{k}+\frac{12}{k}-4\right]>0$ (5)

$\Rightarrow \frac{5(18-k)}{k^2}>0 \quad \Rightarrow \quad k<18.\ (\because k\neq 0)$ (5) **25**

9. **$A\equiv(1,2)$, $B\equiv(-5,4)$ හා S යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස වූ වෘත්තය යැයි ගනිමු.**

(i) S වෘත්තයේ ද

(ii) S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරන, කේන්ද්‍රය $(1,1)$ ලෙස ඇති වෘත්තයේ ද

සමීකරණ සොයන්න.

(i) $\frac{(y-2)(y-4)}{(x-1)(x+5)}=-1$, $x\neq 1,-5$ සඳහා (5)

$S:(x-1)(x+5)+(y-2)(y-4)=0$ (5)

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

(ii) අවශ්‍ය වෘත්තය S' යැයි ගනිමු.

එවිට $x^2+y^2-2x-2y+c'=0$. (5)

S හා S' ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ $\Rightarrow 2gg'+2ff'=c+c'$, මෙහි $g=2, f=-3, g'=-1, f'=-1,$ $c=3$ and $c'=c'$. (5)

$\Rightarrow 2(2)(-1)+2(-3)(-1)=3+c'$

$\Rightarrow \quad c'=-1$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$\therefore S' : x^2 + y^2 - 2x - 2 \quad 1 = 0$

විකල්ප ක්‍රමය

(i) $S : (x-1)(x+5) + (\quad 2)(y-4) = 0$ (10)

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + \quad = 0$

(ii) අවශ්‍ය වෘත්තය S' යැයි ගනිමු.

එවිට $S' : (x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$ (5)

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 - r^2 = 0.$

S හා S' ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ $\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$, මෙහි $g = 2, f = -3, g' = -1, f' = -1,$ $c = 3$ හා $c' = 2 - r^2$.

$2(2)(-1) + 2(-3)(-1) = 3 + (2 - r^2)$ (5)

$\Rightarrow \quad r^2 = 3$ (5)

$\therefore S' : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

25

10. $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ සමීකරණය විසඳන්න.

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

(5) (5)

$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 2\sin 2x \cos x + \sin 2x$

$\cos 2x(2\cos x + 1) = \sin 2x(2\cos x + 1)$ (5)

$\cos 2x = \sin 2x \ (\because 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cos x + 1 \ne 0)$

(5)

$\tan 2x = 1 \ (\because \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x \ne 0)$

$2x = \dfrac{\pi}{4} \ \left(\because 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$x = \dfrac{\pi}{8}.$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

11. (a) $a \neq 0$ හා $a+b+c \neq 0$ වන පරිදි $a, b, c \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ද ගනිමු.

$f(x) = 0$ සමීකරණයෙහි 1 මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු.

$(\alpha-1)(\beta-1) = \frac{1}{a}(a+b+c)$ බව ද $\frac{1}{\alpha-1}$ හා $\frac{1}{\beta-1}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $g(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $g(x) \equiv (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a$ වේ.

දැන් $a > 0$ හා $a+b+c > 0$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි අවම අගය වන m_1 යන්න $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.

$g(x)$ හි අවම අගය m_2 යැයි ගනිමු. $(a+b+c)m_2 = am_1$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$ ම නම් පමණක් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ හා $q(x) = x^2 + 3x + 6$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $p(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $q(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත් සොයන්න.

$p(x) = (x-1)q(x) + 5$ බව සත්‍යාපනය කර, $p(x)$ යන්න $(x-1)(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

(a) $f(1) = a+b+c \neq 0.$ (5)

$\therefore$ 1, $f(x) = 0$ හි මූලයක් නොවේ (5)

10

$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ හා $\alpha\beta = \frac{c}{a}$. (5) For both

$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1$ (5)

$= \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1$

$= \frac{a+b+c}{a}$ (5)

වෙනත් ක්‍රමයක්

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ (5)

$f(1) = a(1-\alpha)(1-\beta) = a+b+c$ (5)

$(1-\alpha)(1-\beta) = \frac{a+b+c}{a}$ (5)

15

$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha-1}$ හා $\beta_1 = \frac{1}{\beta-1}$ යැයි ගනිම

α_1 හා β_1 මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $(x-\alpha_1)(x-\beta_1) = 0$ වේ.

(10)

Alevel ඇපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

එනම් $x^2-(\alpha_1+\beta_1)x+\alpha_1\beta_1=0$ ---------(1)

දැන් $\alpha_1+\beta_1=\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=\dfrac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}$ (5)

$$=\frac{-\frac{b}{a}-2}{(a+b+c)/a}=-\frac{(2a+b)}{a+b+c}$$ (5)

තවද $\alpha_1\beta_1=\dfrac{a}{a+b+c}$. (5)

(1) මගින් , අවශ්‍ය සමීකරණය $x^2+\dfrac{(2a+b)}{(a+b+c)}x+\dfrac{a}{a+b+c}=0$ වේ.

$\Leftrightarrow (a+b+c)x^2+(2a+b)x+a=0$

$\Leftrightarrow g(x)=0$, මෙහි $g(x)=(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a$. (5) 30

$f(x)=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$ (5)

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=\underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0\ (\because a>0)}-\frac{\Delta}{4a}$$ (5)

$\geq -\dfrac{\Delta}{4a}$ හා ($x=-\dfrac{b}{2a}$ විට = ලකුණ ලැබේ.)

(5) (5)

$\therefore$ $f(x)$ හි අවම අගය $-\dfrac{\Delta}{4a}$ වේ. (5)

එනම් $m_1=-\dfrac{\Delta}{4a}$. 25

එබැවින් $m_2=-\dfrac{\Delta'}{4(a+b+c)}$, (5)

මෙහි $\Delta'=(2a+b)^2-4(a+b+c)\cdot a$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - 4ac$

$= b^2 - 4ac$

$= \Delta.$ (5)

එනයින් $m_2 = \dfrac{-\Delta'}{4(a+b+c)}$

$= \dfrac{4a\, m_1}{4(a+b+c)}$ (5)

$\Leftrightarrow (a+b+c)m_2 = am_1.$

[20]

$x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow m_1 \geq 0$ (5)

$\Leftrightarrow m_2 \geq 0 \qquad \because m_2 = \dfrac{am_1}{(a+b+c)}$ (5)

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$ (5)

[15]

(b) $p(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $p(1) = 5$ වේ. (5)

$q(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $q(2) = 16$ වේ. (5)

[10]

$(x-1)q(x) + 5 = (x-1)(x^2 + 3x + 6) + 5$ (5)

$= x^3 + 3x^2 + 6x - x^2 - 3x - 6 + 5$

$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ (5)

$= p(x).$

[10]

$q(x) = (x-2)(x-5) + 16$ (5)

$\therefore\ p(x) = (x-1)\{(x-2)(x+5) + 16\} + 5$

$= (x-1)(x-2)(x+5) + 16x - 11.$ (5)

ඒනයින් අවශ්‍ය ශේෂය $16x - 11$ වේ (5)

[15]

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

12. (a) $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $(1+x)^n$ සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කරන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ සඳහා $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{n-r}{r+1}$ බව පෙන්වන්න.

$(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^r, x^{r+1} හා x^{r+2} හි සංගුණක එම පිළිවෙළින් ගත් විට $1 : 2 : 3$ අනුපාත වලින් යුතු වේ. මෙම අවස්ථාවේ දී $n = 14$ හා $r = 4$ බව පෙන්වන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}$ හා $f(r) = r(Ar+B)$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය **සොයන්න.**

(a) $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, මෙහි ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ සඳහා

(5) (5) [10]

$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, සඳහා

$$\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}$$ (10)

$$= \frac{\dfrac{1}{r+1}}{\dfrac{1}{n-r}} = \frac{n-r}{r+1}. \text{ ---------- (1)}$$ (5) [15]

එලෙසම $r = 0, 1, 2, \ldots, n-2$, සඳහා

$$(1) \Rightarrow \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}} = \frac{n-r-1}{r+2}.$$ (5)

A/L උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1:2:3$ බව දී ඇත.

(5)

$\Rightarrow \dfrac{n-r}{r+1} = 2$ හා $\dfrac{n-r-1}{r+2} = \dfrac{3}{2}$

(5) (5)

$\Rightarrow n-r = 2(r+1)$ -------- (2) හා $2(n-r-1) = 3(r+2)$

$\Rightarrow 4(r+1) - 2 = 3r + 6$

$\Rightarrow r = 4$, හා (2) මගින් $n = 14$ වේ.

(5) (5)

30

(b) $\dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)} = \dfrac{r(Ar+B)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{(r+1)(Ar+A+B)}{(2r-1)(2r+1)}$ (10)

$\Leftrightarrow 10r + 9 = r(Ar+B)(2r+1) - (r+1)(Ar+A+B)(2r-3)$ (5)

$= r\left[2Ar^2 + (A+2B)r + B\right] - (r+1)\left[2Ar^2 + (2A+2B-3A)r - 3(A+B)\right]$

$= 2Ar^3 + (A+2B)r^2 + Br - 2Ar^3 - (2B-A)r^2 + 3(A+B)r - 2Ar^2 - (2B-A)r + 3(A+B$

$= -(4A+2B)r + 3(A+B)$ $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා (5)

$\Leftrightarrow r^1 : 4A + 2B = 10$ හා $r^0 : 3A + 3B = 9$ (10)

$\Leftrightarrow A = 2$ හා $B = 1$.

(5) (5)

40

$U_r = g(r) - g(r+1)$, මෙහි $g(r) = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}$ ද $f(r) = r(2r+1)$ ද වේ.

$r = 1;\quad U_1 = g(1) - g(2)$

$r = 2;\quad U_2 = g(2) - g(3)$ (10)

$r = n-1;\quad U_{n-1} = g(n-1) - g(n)$

$r = n;\quad U_n = g(n) - g(n+1)$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = g(1) - g(n+1)$ (10)

Alevel ඇපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

5 5

$$= \frac{(1)(3)}{(-1)(1)} - \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$$ **30**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} \left\{ -3 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(4-\frac{1}{n^2}\right)} \right\}$$ 5

5

$$= -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$ 5

ඒනයින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{2}$ වේ. 5 **25**

5

13.(*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$ හා $\mathbf{AY} = \mu \mathbf{Y}$ වන පරිදි λ හා μ තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ හා $\mathbf{AP}$ සොයා, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ වේ.

(*b*) ආගන්ඩ් සටහනක, A ලක්ෂ්‍යය $2+i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. B ලක්ෂ්‍යය, $OB = 2\,(OA)$ හා $A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$ වන පරිදි වේ; මෙහි O යනු මූලය ද $A\hat{O}B$ මැන ඇත්තේ OA සිට වාමාවර්තව ද වේ. B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(*c*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ද $w = \frac{2}{1+i} + \frac{5z}{2+i}$ යැයි ද ගනිමු. $\text{Im}\, w = -1$ හා $|w-1+i| = 5$ බව දී ඇත. $z = \pm(2+i)$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 5

$\lambda \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ 5

A/L උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

දූන් $\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = 2.$ (5)

$\mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mu \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix}.$

දූන් $\mathbf{AY} = \mu \mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (5)

$\Leftrightarrow \mu = -1.$ (5) [25]

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-a - 2c = 1$

$-b - 2d = 0$

$a + c = 0$

$b + d = 1$

$\Rightarrow c = -1, a = 1$

$\Rightarrow d = -1, b = 2$

$\therefore \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (15)

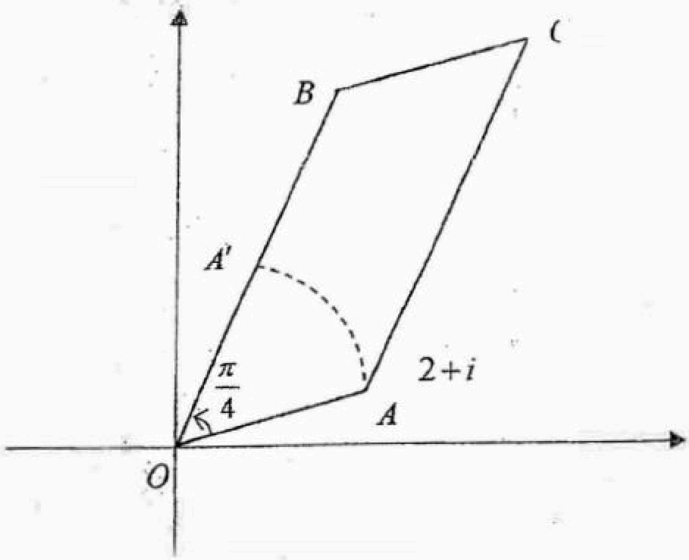
$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (5)

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$ (5)

[25]

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(b)



$\frac{\pi}{4}$ කෝණයක් මගින් O වටා OA රේඛාව වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන A' ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව **(10)**

$$z_1 = (2+i)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)(1+i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i).$$ **(5)**

$OA = OA' \Rightarrow OB = 2OA'$.

B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය වන z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

$$z_2 = 2z_1$$

$= \sqrt{2}(1+3i)$ මගින් දෙනු ලැබේ. **(10)** | 25 |

C ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

$$= (2+i) + z_2$$ **(10)**

$$= 2 + i + \sqrt{2}(1+3i)$$

$$= (2+\sqrt{2}) + (1+3\sqrt{2})i.$$ **(5)** | 15 |

A level අපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(c) $w=\dfrac{2}{1+i}+\dfrac{5z}{2+i}$

$=\dfrac{2(1-i)}{2}+\dfrac{5z(2-i)}{5}$ (5)

$=1-i+z(2-i).$ (5)

$\text{Im}\, w=-1\Rightarrow -1=-1+\text{Im}\, z(2-i)$

$\Rightarrow \text{Im}\, z(2-i)=0$ (15)

$\Rightarrow z(2-i)=\bar{z}(2+i)$ ------- (1)

$|w-1+i|=5 \Rightarrow |z(2-i)|=5$

$\Rightarrow |z||2-i|=5$

$\Rightarrow |z|\sqrt{5}=5$ (15)

$|z|=\sqrt{5}$ ------------- (2)

$(1)\times z \Rightarrow z^2(2-i)=z\bar{z}(2+i)$

$(2) \Rightarrow z\bar{z}=5$

$\therefore z^2(2-i)=5(2+i)$ (10)

$z^2=\dfrac{2+i}{2-i}.5=\dfrac{5}{5}(2+i)^2$

$\therefore z=\pm(2+i).$ (10)

60

A level අපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

14. (*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න, $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

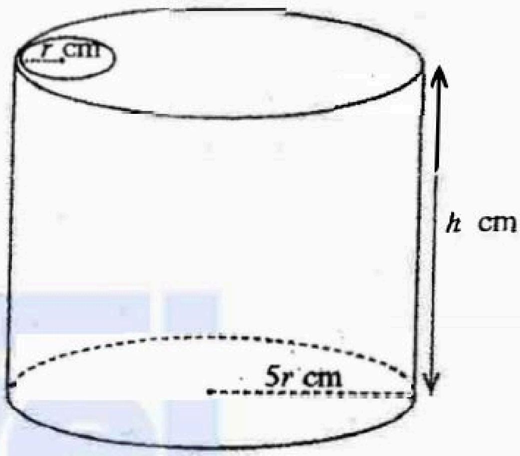
$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය, $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) අරය $5r$ cm හා උස h cm වූ සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක හැඩය ඇති තුනී ලෝහ බඳුනකට, අරය r cm වූ වෘත්තාකාර සිදුරක් සහිත අරය $5r$ cm වූ වෘත්තාකාර පියනක් ඇත. (රූපය බලන්න.) බඳුනෙහි පරිමාව 245π cm^3 වන බව දී ඇත. සිදුර සහිත පියන සමඟ බඳුනෙහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 49\pi\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)2.(x-3) - (x-3)^2.2x}{(x^2-1)^2}$$ **(15)**

$$= \frac{2(x-3)\left[x^2 - 1 - x(x-3)\right]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$$ **(5)**

20

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$ ඒනයින් $y = 1.$ **(5)**

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty.$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty.$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $x = \pm 1$ **(5)**

10

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$y = f(x)$ හා $y = 1$ සමගාමීව විසඳමු

i.e $\frac{(x-3)^2}{x^2-1}$ (5)

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 1$

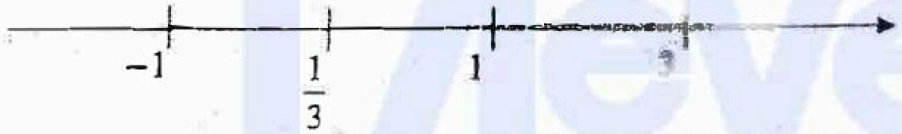
$\Leftrightarrow 6x = 10$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$ (5)

ඒනයින් අවශ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $= \left(\frac{5}{3}, 1\right).$ (5)

15

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ හෝ $x = \frac{1}{3}.$

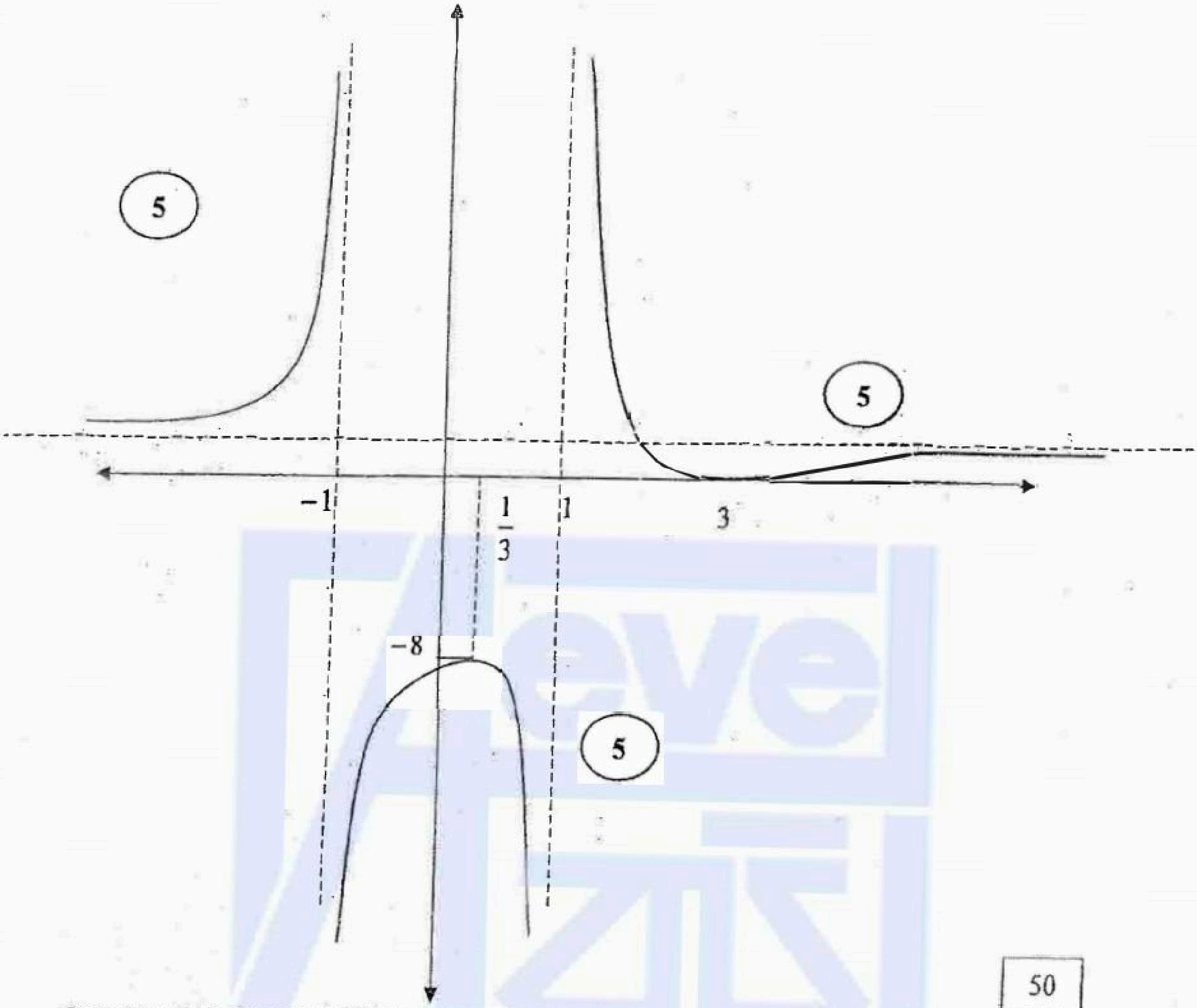


	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(+)	(-)	(-)	(+)
	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය දෙකක් ඇත. $\left(\frac{1}{3}, -8\right)$ – ස්ථානීය උපරිම (5) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}{\frac{1}{9}-1} = \frac{64}{-8} = -8$

$(3, 0)$ – ස්ථානීය අවම (5)

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .



50

(b) $S = 2\pi(5r)h + \pi(5r)^2 \times 2 - \pi r^2$ (10)

$= 10\pi rh + 49\pi r^2$ ------------(1)

$245\pi = \pi(5r)^2 \times h$ (5)

$\therefore h = \frac{245}{25r^2} = \frac{49}{5r^2}$

(1) $\Rightarrow S = 10\pi r \times \frac{49}{5r^2} + 49\pi r^2$ (5)

$= 49\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right);\ r > 0.$

20

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$\frac{dS}{dr} = 49\pi\left(2r - \frac{2}{r^2}\right)$$ 10

5 $\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2r = \frac{2}{r^2} \Leftrightarrow r = 1.$ ($r > 0$ නිසා) 5

5 $0 < r < 1$ සඳහා $\frac{dS}{dr} < 0$ හා $r > 1$ සඳහා $\frac{dS}{dr} > 0$ 5

$\therefore r = 1$ විට S උපරිම වේ. 5

35

15.(*a*) (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ සොයන්න.

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ සොයා, ඒ නයින්, $\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ සොයන්න.

ඉහත අනුකල භාවිතයෙන් $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ සොයන්න.

(*b*) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒ නයින්, $\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}dx$ සොයන්න.

(*c*) (i) $n \neq -1$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^n(\ln x)\,dx$ සොයන්න.

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx$ අගයන්න.

(a) (i)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$ 10

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_1$$ 10 මෙහි C_1 අභිමත නියතයකි.

20

(ii) $\frac{d(\sqrt{3+2x-x^2})}{dx} = \frac{1}{2}(3+2x-x^2)^{-1/2} \times (2-2x)$

$= \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 10

$\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -\sqrt{3+2x-x^2} + C_2$, මෙහි C_2 අභිමත නියතයකි. 10

$\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 10

$= -\sqrt{3+2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_3$, මෙහි C_3 අභිමත නියතයකි.

5 5

40

A level Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ (10)

$2x - 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$

$x^2: \quad 0 = A + B$

$x^1: \quad 2 = B + C$

$A - C = -2$

$x^0: -1 = A + C$

$A = -3/2$

$C = 1/2$ (10)

$B = 3/2$

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{3x+1}{x^2+1}$$

$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{-3}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{3x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} dx$ (5)

$= \frac{-3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C_4,$ (15)

මෙහි C_4 අභිමත නියතයකි. **40**

(c) (i) $n \neq -1,$

$\int x^n(\ln x)dx = \int (\ln x).\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$ (10)

$= \left(\frac{x}{n+1}\right)(\ln x) - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)}.\frac{1}{x}dx$ (10)

$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)}\int x^n dx$

$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C_5$ (10)

. මෙහි C_5 අභිමත නියතයකි. **30**

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$ (5)

(15) **20**

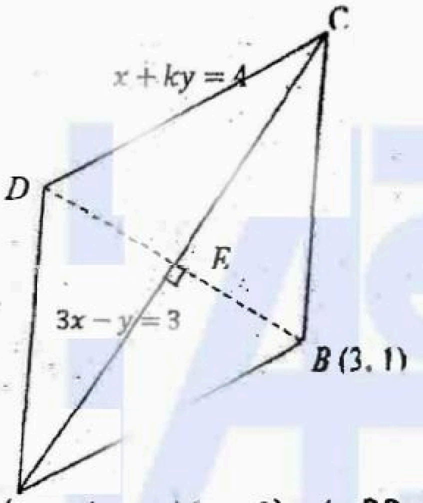
උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

16. (a) ABCD රොම්බසයක AC විකර්ණයෙහි සමීකරණය $3x - y = 3$ ද $B \equiv (3, 1)$ ද වේ. තව ද CD හි සමීකරණය $x + ky = 4$ වේ; මෙහි k යනු තාත්වික නියතයකි. k හි අගය හා BC හි සමීකරණය සොයන්න.

(b) පිළිවෙළින් $x^2 + y^2 = 4$ හා $(x-1)^2 + y^2 = 1$ සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වෘත්තවල දළ සටහන් ඒවායේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය පැහැදිලිව දක්වමින් අඳින්න.

C_3 වෘත්තයක් C_1 අභ්‍යන්තරව ද C_2 බාහිරව ද ස්පර්ශ කරයි. C_3 හි කේන්ද්‍රය $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(a)



BD: හි සමීකරණය $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$ $(\because BD \perp AC)$

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = t$ යැයි ගනිමු. (10)

$\therefore x = 3 + 3t$ හා $y = 1 - t$. (10)

t යන්න D ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප වේ යැයි ගනිමු.

$E \equiv \left(3 + \frac{3t}{2}, 1 - \frac{t}{2}\right) AC$

$\therefore 3\left(3 + \frac{3t}{2}\right) - \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 3$

$\Rightarrow 8 + 5t = 3 \quad \Rightarrow t = -1.$ (10)

$\therefore D \equiv (0, 2)$ (10)

එවිට DC මත වේ.

$0 + k \times 2 = 4$ (10)

$k = 2.$

50

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 10\,;7y = 9$$

$$C \equiv \left(\frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right)$$ (10)

BC හි සමීකරණය:

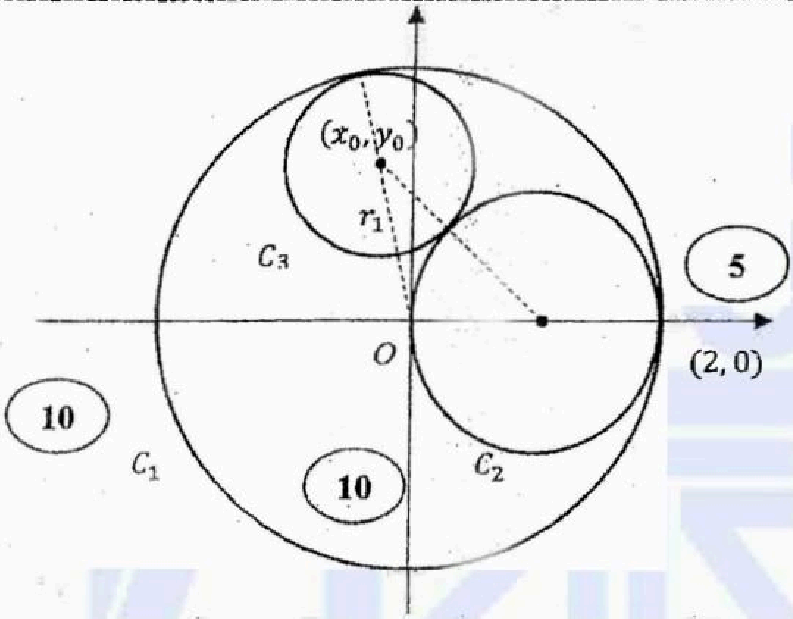
$$y - 1 = \frac{\frac{2}{7}}{-\frac{11}{7}}(x - 3)$$

$$-11y + 11 = 2x - 6$$

$$2x + 11y = 17.$$ (10)

[20]

(b)



[25]

C_3 , C_1 අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි $\Rightarrow$ $2 - r_1 = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}$ (15)

C_3 ,C_2 බාහිරව ස්පර්ශ කරයි $\Rightarrow 1 + r_1 = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + {y_0}^2}$ (15)

$$3 = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} + \sqrt{(x_0 - 1)^2 + {y_0}^2}$$ (5)

$$(x_0 - 1)^2 + {y_0}^2 = 9 - 6\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} + {x_0}^2 + {y_0}^2$$
$${x_0}^2 - 2x_0 + 1 + {y_0}^2 = 9 - 6\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} + {x_0}^2 + {y_0}^2$$ (10)

$$2x_0 + 8 = 6\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}$$ (5)

$$\Rightarrow ({x_0}^2 + {y_0}^2) = {x_0}^2 + 8x_0 + 16$$

$$\Rightarrow 8{x_0}^2 + 9{y_0}^2 - 8x_0 - 16 = 0$$

ඒනයින් (x_0, y_0), යන්න $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටයි (5)

[55]

A level අපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

17. (a) $\tan\alpha$ හා $\tan\beta$ ඇසුරෙන් $\tan(\alpha+\beta)$ සඳහා වූ ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යය ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\tan\theta$ ඇසුරෙන් $\tan 2\theta$ ලබා ගන්න. $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

අවසාන සමීකරණයෙහි $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$ ආදේශ කිරීමෙන්, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$ යන්න $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1)$ ලෙස සාධකවලට දී ඇති විට, $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $0 < A < \pi$ සඳහා $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$ බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නීතිය භාවිත කර,

$(a+b+c)(b+c-a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a+b-c)(a+c-b)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$ (10)

[10]

Let $\alpha = \beta = \theta$: (5)

$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.$$ (5)

[10]

$\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta)$ (5)

$$= \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}$$ (5)

$$= \frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta) + 2\tan\theta}{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta}$$ (5)

$$= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$ (5)

[20]

---

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$\theta = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{1-3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$ (5)

$$\Rightarrow -3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 1 = 0.$$ $\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.\right)$ බැවින්, (5)

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ is a root of } x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$ (5)

15

$(x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \neq -1 \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ යන්න $x^2 - 4x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් වේ. (5)

(5)

එනම් $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ (5)

$\frac{5\pi}{12} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 1.$ (5)

$2 - \sqrt{3} < 1,$ බැවින් $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}.$ (5)

25

(b) $0 < A < \pi.$ (5)

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{A}{2}\right)$$ (5)

(5)

15

කෝසයින නීතිය

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$ (5)

$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

දැන් $$\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}}{1 - \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}}$$ (10)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc - a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a)(a+b+c)}$$ (5)

$$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = (a+b-c)(a+c-b).$$ (5)

20

25

(c) Let $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ හා $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ යැයි ගනිමු.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha > 0$
$\cos\beta > 0.$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$ (5)

$$= \frac{3}{5}.\sqrt{1 - \frac{25}{169}} + \sqrt{1 - \frac{9}{25}}.\frac{5}{13}$$ (5)

$$= \frac{3}{5}.\frac{12}{13} + \frac{4}{5}.\frac{5}{13}$$

$$= \frac{56}{65}.$$ (5)

$\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, බැවින් $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ වේ.

එලෙසම $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$, බැවින් $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ වේ.

$\therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ හා ඒනයින් $\alpha + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ වේ. (10)

25

---

www.alevelapi.com

Alevelapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .