අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2017

10 - සංයුක්ත ගණිතය

ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස	10 x 25	=	250
B කොටස	05 x 150	=	750
එකතුව		=	1000/10
I පත්‍රය සඳහා අවසාන ලකුණු		=	100

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(3r+1) = n(n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා, L.H.S. $=1\cdot(3+1)=4$ හා R.H.S. $=1\cdot(1+1)^2=4$. (5)

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n=1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන ප්‍රතිඵලය $n=p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

i.e. $\sum_{r=1}^{p} r(3r+1) = p(p+1)^2$. ———— (1) (5)

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r(3r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(3r+1) + (p+1)(3p+4)$ (5)

$= p(p+1)^2 + (p+1)(3p+4)$

$= (p+1)(p^2+p+3p+4)$

$= (p+1)(p+2)^2$. (5)

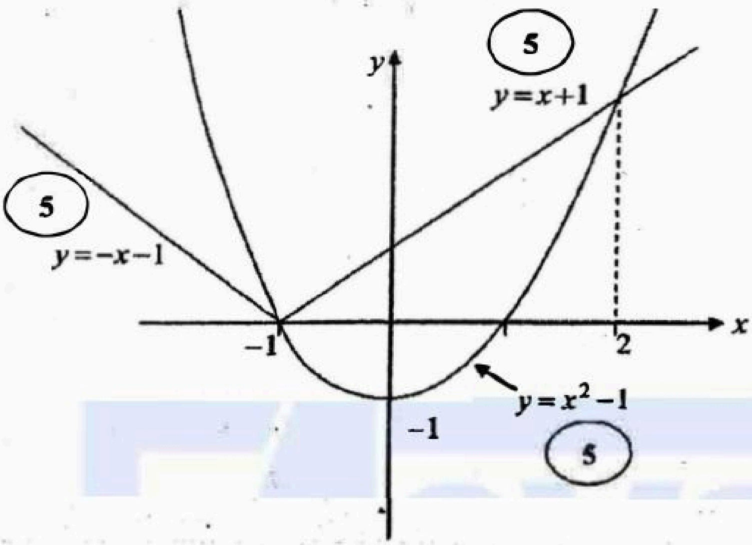
එනයින් $n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n=p+1$ සඳහාද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වෙයි. $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බැව් ඉහත පෙන්වා ඇත. එමනිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

www.alevelapi.com

A level Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

2. $x^2 - 1 \ge |x+1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.



(5)

ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වලදී $x \ge -1$ සහ $x^2 - 1 = x + 1$ විය යුතුයි . එමනිසා $x = -1$ හා $x = 2$ වේ.

$x \le -1$ හෝ $x \ge 2$ වන x තාත්වික අගයන් විසඳුම් ලෙස ලැබේ. (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක් I

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{if } x \ge -1 \\ -(x+1) & \text{if } x < -1 \end{cases}$$

(i) අවස්ථාව $x \ge -1$

මෙහිදී, $x^2 - 1 \ge |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \ge x + 1$ (5)

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \le -1 \text{ or } x \ge 2.$ (5)

$x \ge -1$ නිසා, $x = -1$ හෝ $x \ge 2$ විසඳුම් වේ.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(ii) අවස්ථාව $x < -1$,

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq -(x+1)$ (5)

$\Leftrightarrow x^2 + x \geq 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -1$ or $x \geq 0$. (5)

$x < -1$ නිසා, $x < -1$ විසඳුම් වේ.

අවස්ථා දෙකෙන් $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් ලෙස ලැබේ. (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

(i) අවස්ථාව $x > -1$

$x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq x+1$ (5)

$\Leftrightarrow x \leq -1$ or $x \geq 2$. (5)

$x > -1$ නිසා, $x \geq 2$ විසඳුම් වේ..

(ii) අවස්ථාව $x \leq -1$

$x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq -(x+1)$ (5)

$\Leftrightarrow x \leq -1$ or $x \geq 0$. (5)

$x \leq -1$ නිසා, $x \leq -1$ විසඳුම් වේ..

අවස්ථා දෙකෙන්, $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් ලෙස ලැබේ. (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

වෙනත් ක්‍රමයක් 3

(i) අවස්ථාව $x^2 \geq 1$

මෙහිදී $x^2 - 1 \geq 0$, හා පැති දෙකම ධන අගයන් ගනී.

$\therefore\ x^2 - 1 \geq |x+1|$

$\Leftrightarrow (x^2-1)^2 \geq (x+1)^2$ (5)

$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^2 - (x+1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2[(x-1)^2 - 1] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 x(x-2) \geq 0$ (5)

$\Leftrightarrow x = -1$ or $x \leq 0$ or $x \geq 2$ (5)

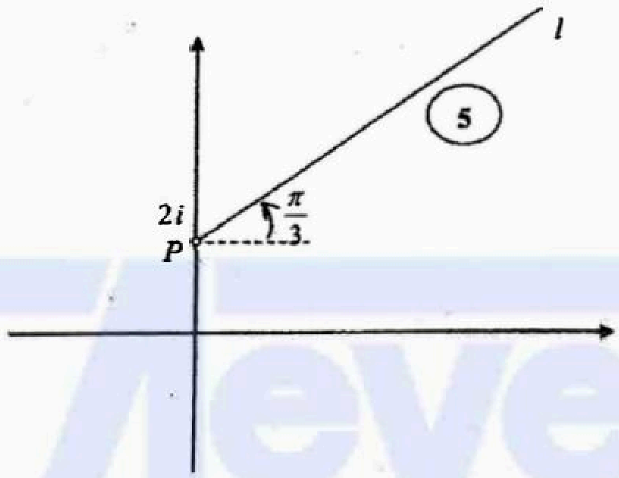
$x^2 \geq 1$ නිසා $\Leftrightarrow x \leq -1$ හෝ $x \geq 1$, වේ. $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම වේ. (5)

(ii) අවස්ථාව $x^2 < 1$

$x^2 - 1 < 0$, නිසා පිළිතුරක් නොමැත. අවස්ථා දෙකෙන්ම $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ ලෙස ලැබේ.
(5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\operatorname{Arg}(z-2i)=\frac{\pi}{3}$ යන්න සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථය වන l හි දළ සටහනක් අඳින්න.
P හා Q යනු ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි පිළිවෙළින් $2i$ හා $\sqrt{3}+5i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. PQ දුර සොයා Q ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.



$(\sqrt{3}+5i)-2i=\sqrt{3}+3i$

$=2\sqrt{3}\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (5)

$=2\sqrt{3}\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ (5)

$\therefore PQ=2\sqrt{3}.$ (5)

තවද, $\operatorname{Arg}\left((\sqrt{3}+5i)-2i\right)=\frac{\pi}{3}$ හා එනයින් Q , l මත පිහිටයි.

(5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

4. INFINITY යන වචනයෙහි අකුරු අට, වෙනස් ආකාර කීයකට පේළියක පිළිවෙළ කළ හැකි ද? මෙම පිළිවෙළ කිරීම්වලින් කොපමණක

(i) I අකුරු තුන ම එක ළඟ තිබේ ද?

(ii) හරියටම එක I අකුරක් හා N අකුරු දෙක ම මුල් අකුරු තුන ලෙස තිබේ ද?

I	N	F	T	Y
3	2	1	1	1

$\frac{8!}{3!\,2!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{2}$ (5)

$= 3360.$ (5)

(i) $\frac{6!}{2!} = 360.$ (5)

(ii)

I	F	T	Y
2	1	1	1

N	N	I					
N	I	N					
I	N	N					

(5) $\frac{5!}{2!}\times3 = 5\times4\times3\times3$

$= 180.$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

5. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3-\alpha^3}{\tan x - \tan\alpha} = 3\alpha^2\cos^2\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3-\alpha^3}{\tan x - \tan\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$ (5)

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)\cos x\cos\alpha\cdot(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha}$$ (5)

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}\cdot\cos x\cos\alpha\cdot(x^2+\alpha x+\alpha^2)$$ (5)

(5)

$$= 1\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(3\alpha^2)$$

$$= 3\alpha^2\cos^2\alpha.$$ (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක් I

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3-\alpha^3}{\tan x - \tan\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{\tan(x-\alpha)(1+\tan x\tan\alpha)}$$ (5) $$\left(\because \tan(x-\alpha) = \frac{\tan x - \tan\alpha}{1+\tan x\tan\alpha}\right)$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{\tan(x-\alpha)}\cdot\frac{x^2+\alpha x+\alpha^2}{(1+\tan x\tan\alpha)}$$ (5)

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}\ \frac{\cos(x-\alpha)\cdot(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{(1+\tan x\tan\alpha)}$$

(5)

$$= 1\cdot\frac{1\cdot 3\alpha^2}{1+\tan^2\alpha}$$ (5)

$$= \frac{3\alpha^2}{\sec^2\alpha} = 3\alpha^2\cos^2\alpha.$$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{\tan x-\tan\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$ (5)

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha}{\cos x\cos\alpha}}$$ (5)

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)}{\sin(x-\alpha)}\cdot\cos x\cos\alpha$$ (5)

$$=3\alpha^2\cdot 1\cdot\cos^2\alpha$$

(5)

$$=3\alpha^2\cos^2\alpha$$ (5)

25

6. $0<a<b$ යැයි ගනිමු. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) = -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $\int\frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}dx$ සොයන්න.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(b-a)}{b}\cos^2 x}}\times\sqrt{\frac{b-a}{b}}\times(-\sin x)$$ (5) + (5)

$$= -\frac{\sin x}{\sqrt{b-b\cos^2 x+a\cos^2 x}}\times\sqrt{b-a}$$

$$= -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}$$ (5)

$$\therefore\int-\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}dx = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) + \text{නියතය}$$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) + C,$$ මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි. (5)

C නියතය නැත්නම් (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$y = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\sin y = \sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x$ හා $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$$\cos y\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-a}{b}}(-\sin x) \text{ ---------- } (1) \quad (5)$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{1-\frac{b-a}{b}\cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\frac{b(1-\cos^2 x)+a\cos^2 x}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}{\sqrt{b}} \quad (5)$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}} \quad (5)$$

පෙර මෙන් අනුකලනය (10)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

7. C වක්‍රයක්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx} = -\cot^3\theta$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ රේඛාවේ අනුක්‍රමණය -1 වන පරිදි C වක්‍රය මත වූ P ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$x = 3\cos\theta - \cos^3\theta \qquad y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$; $\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$ (5) (5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{-3\sin\theta(1-\cos^2\theta)} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = -\cot^3\theta. \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow \cot\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

$$P \equiv \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \equiv \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{2\sqrt{2}}\right). \quad (5)$$

25

---

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $3x - 4y = 2$ හා $4x - 3y = 1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

(i) l_1 හා l_2 අතර කෝණවල සමච්ඡේදකයන්හි සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(ii) l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න.

සමච්ඡේදක,

$$\frac{3x-4y-2}{5} = \pm\frac{4x-3y-1}{5} \quad (5)$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

$x + y + 1 = 0$ හෝ $7x - 7y - 3 = 0$ (5)

l_1 හා $x + y + 1 = 0$ අතර සුළු කෝණය α ලෙස ගනිමු.

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}}\right| \quad (5)$$

$$= 7 > 1. \quad (5)$$

$\therefore 7x - 7y - 3 = 0$ යනු l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමීකරණය වේ. (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

9. S යනු $x^2+y^2-4=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය යැයි ද l යනු $y=x+1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ද ගනිමු. S හා l හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ ද S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x^2+y^2-4)+\lambda(y-x-1)=0$ ආකාර වේ.; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$.

i.e. $x^2+y^2-\lambda x+\lambda y-\lambda-4=0.$ (10)

මෙය S ට ප්‍රලම්බ නම්, $g=0; f=0; c=-4; g'=-\frac{\lambda}{2}; f'=\frac{\lambda}{2}; c'=-\lambda-4$, සමගින්

$2gg'+2ff'=c+c'$ විය යුතුයි. (5)

i.e. $0=-\lambda-8$

$\therefore \lambda=-8.$ (5)

$\therefore$ පිළිතුර $x^2+y^2+8x-8y+4=0$ වේ. (5)

25

---

10. $-\pi<\theta\le\pi$ සඳහා $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2=1+\sin\theta$ බව පෙන්වන්න. එ නයින්, $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ බව පෙන්වා $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$ හි අගය ද සොයන්න. $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}$$

(5)

$$=1+\sin\theta \quad \left(\because \sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1 \text{ and } 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta.\right)$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු. (5)

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)^2=1+\frac{1}{2}.$

$\therefore \sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ——————— (I) (5) $\left(\because \sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}>0\right)$

$\theta=\frac{-\pi}{6}$ යැයි ගනිමු.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)^2=\frac{1}{2}.$

$\therefore \cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ------------ (2) $(\because \sin\frac{\pi}{12}<\cos\frac{\pi}{12})$ (5)

$(1)-(2) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$ (5)

25

www.alevelapi.com

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

B කොටස

11. (a) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙන බව දී ඇත. $a^2 > 3b$ බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ ද b ඇසුරෙන් $\alpha\beta$ ද ලියා දක්වන්න.

$|\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$ බව පෙන්වන්න.

$|\alpha + \beta|$ හා $|\alpha - \beta|$ ඓකිය මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$9x^2 - 6\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2b} = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(b) $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වේ. $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -4 බව පෙන්වන්න.

p හා q හි අගයන් සොයා $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

(5)

(a) විවේචකය $\Delta = (2a)^2 - 4(3)(b)$

$= 4(a^2 - 3b)$. (5)

$f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති නිසා, $\Delta > 0$ විය යුතුයි. (5)

$\therefore\ a^2 > 3b$. (5)

20

$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}$ හා $\alpha\beta = \frac{b}{3}$.

(5) (5)

10

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ (10)

$= \frac{4a^2}{9} - \frac{4b}{3}$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$= \frac{4}{9}(a^2 - 3b).$$ (5)

$$\therefore\ |\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}.$$ (5)

25

$\alpha' = |\alpha + \beta|$ හා $\beta' = |\alpha - \beta|$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha' = \frac{2}{3}|a|$ හා $\beta' = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$.

(5)

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x - \alpha')(x - \beta') = 0$ වේ. (5)

i.e. $x^2 - (\alpha' + \beta')x + \alpha'\beta' = 0$. (5)

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{2}{3}|a| + \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}\right)x + \frac{4}{9}|a|\sqrt{a^2 - 3b} = 0.$$

(5) (5)

$$\Rightarrow 9x^2 - 6\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2b} = 0.$$ (5)

30

(b) $g(x)$ යන්න $(x-1)(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වන නිසා ,

$g(x) = h(x)(x-1)(x+2) + 3x + 2$, ------------ (1) (10)

මෙහි $h(x)$ මාත්‍රය 1 වන බහුපදයකි.

ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(1)$ වේ.

(5)

$(1) \Rightarrow g(1) = 5$. (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

එනයින්, $g(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය 5 වේ.

නැවතත්, ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(-2)$ වේ. (5)

$(1) \Rightarrow g(-2) = -4$. (5)

එනයින්, $g(x)$ යන්න $(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය -4 වේ.

30

$g(1) = 5 \Rightarrow 1 + p + q + 1 = 5$ (5)

$p + q = 3$

$g(-2) = -4 \Rightarrow -8 + 4p - 2q + 1 = -4$ (5)

$4p - 2q = 3$

$p = \frac{3}{2}$ හා $q = \frac{3}{2}$.

(5) (5)

20

---

(5) (5)

දැන් $g(-1) = -1 + p - q + 1 = 0. (\because p = q)$

එමනිසා සාධක ප්‍රමේයය මගින්, $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. (5) 15

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

12. (a) x හි ආරෝහණ බල වලින් $(5+2x)^{14}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

$r = 0, 1, 2, \ldots, 14$ සඳහා ඉහත ප්‍රසාරණයේ x^r අඩංගු පදය T_r යැයි ගනිමු.

$x \neq 0$ සඳහා $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{2(14-r)}{5(r+1)}x$ බව පෙන්වන්න.

එ නයින්, $x = \dfrac{4}{3}$ වන විට, ඉහත ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදය ලබාදෙන r හි අගය සොයන්න.

(b) $c \geq 0$ යැයි ගනිමු. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \dfrac{1}{(r+c)} - \dfrac{1}{(r+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

එ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{(3+2c)}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{(n+c+1)} - \frac{1}{(n+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

c සඳහා සුදුසු අගයන් සහිත ව මෙම ඓක්‍යය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$ බව පෙන්වන්න.

(a) $\displaystyle (5+2x)^{14} = \sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r 5^{14-r}(2x)^r$ (10)

$\displaystyle = \sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r 5^{14-r} \cdot 2^r \cdot x^r$, මෙහි $r = 0, 1, \ldots, 14$ සඳහා ${}^{14}C_r = \dfrac{14!}{r!(14-r)!}$ (5)

15

$r = 0, 1, \ldots, 14$ සඳහා $T_r = {}^{14}C_r 5^{14-r} \cdot 2^r \cdot x^r$ යැයි ගන්න.

එවිට $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{14!\, 5^{13-r}\, 2^{r+1}}{(r+1)!(13-r)!} x^{r+1} \Big/ \dfrac{14!\, 5^{14-r}\, 2^r}{r!(14-r)!} x^r$ (5)

(10)

$T_{r+1} \rightarrow$ (10)

$= \dfrac{2(14-r)}{5(r+1)} x$ (5)

20

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$x=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{2}{5}\frac{(14-r)}{(r+1)}\cdot\frac{4}{3}$ (5)

$\frac{8}{15}\frac{(14-r)}{(r+1)}\underset{<}{\geq}1$ වන විට $\frac{T_{r+1}}{T_r}\underset{<}{\geq}1$ ලෙස වේ.

(5) (5)

එවිට $112-8r\underset{<}{\geq}15r+15.$

එවිට $r\underset{>}{\leq}\frac{97}{23}=4\frac{5}{23}.$

(5)

$T_0<T_1<T_2<T_3<T_4<T_5>T_6\cdots>T_{14}$ (10) හෝ 0

එමනිසා අවශ්‍ය අගය $r=5.$ (5)

35

(b) $\frac{1}{r+c}-\frac{1}{r+c+2}=\frac{(r+c+2)-(r+c)}{(r+c)(r+c+2)}$ (5)

$=\frac{2}{(r+c)(r+c+2)}.$ (5)

10

$r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r=\frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$, යැයි ගනිමු.

එවිට

$r=1;\quad u_1=\frac{1}{1+c}-\frac{1}{3+c}$ (5)

$r=2;\quad u_2=\frac{1}{2+c}-\frac{1}{4+c}$

$r=3;\quad u_3=\frac{1}{3+c}-\frac{1}{5+c}$ (5)

$\vdots$

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$r=n-2;\ u_{n-2}=\frac{1}{n-2+c}-\frac{1}{n+c}$$ (5)

$$r=n-1;\ u_{n-1}=\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+c+1}$$

$$r=n;\ u_n=\frac{1}{n+c}-\frac{1}{n+c+2}$$ (5) (5)

$$\sum_{r=1}^{n}u_r=\frac{1}{1+c}+\frac{1}{2+c}-\frac{1}{n+c+1}-\frac{1}{n+c+2}$$ (10)

$$=\frac{3+2c}{(1+c)(2+c)}-\frac{1}{n+c+1}-\frac{1}{n+c+2}.$$ (5)

35

දැ. අ. පැ. සීමාව $n\to\infty$ විට $\frac{3+2c}{(1+c)(2+c)}$ වේ. (10)

$\therefore\ \sum_{r=1}^{\infty}u_r$ අභිසාරී වේ හා ඓක්‍යය $\frac{3+2c}{(1+c)(2+c)}$ වේ. (5) (5)

20

$c=0$: ආදේශයෙන්, $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+2)}=\frac{3}{4}$. ——————(1) (5)

$c=1$: ආදේශයෙන් $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)(r+3)}=\frac{5}{12}$. (5)

$\Rightarrow \frac{1}{3}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)(r+3)}=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}=\frac{3}{4}$ ——————(2)

දැන්, (1) හා (2) $\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+2)}=\frac{1}{3}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)(r+3)}$. (5)

15

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ හා $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$AB^T = P$ බව දී ඇත; මෙහි B^T මගින් B න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ. $a = 1$ හා $b = -1$ බව පෙන්වන්න.

a හා b සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව B^TA සොයන්න.

P^{-1} ලියා දක්වා, එය භාවිතයෙන්, $PQ = P^2 + 2I$ වන පරිදි Q න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි I යනු ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසයයි.

(b) ආගන්ඩ් සටහනක, $|z| = 1$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථය වූ C හි දළ සටහනක් අඳින්න.

$z_0 = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ. $\frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය a ඇසුරෙන් ද ප්‍රධාන විස්තාරය θ ඇසුරෙන් ද සොයන්න.

P, Q, R හා S යනු පිළිවෙළින් $z_0, \frac{1}{z_0}, z_0 + \frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යය ඉහත C මත පිහිටන විට

(i) Q හා S ලක්ෂ්‍ය ද C මත පිහිටන බවත්

(ii) R ලක්ෂ්‍යය තාත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටන බවත්

පෙන්වන්න.

(a) $$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$ (5)

$$= \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix}$$ (10)

$$AB^T = P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ (5)

$$\Leftrightarrow 2+2a=4, \quad 2+ab=1, \quad -1+2a-b=2, \quad -1+b^2=0.$$ (10)

$$\Leftrightarrow a=1, \quad b=-1.$$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

දැන් , $B^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5)

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ (5)

45

$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$ (10)

තවද $PQ = P^2 + 2I \Leftrightarrow P^{-1}(PQ) = P^{-1}(P^2 + 2I)$ (5)

$\Leftrightarrow Q = P^{-1}P^2 + P^{-1}(2I)$ (5)

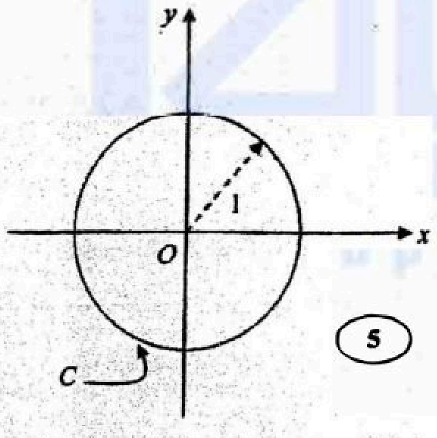
$\Leftrightarrow Q = P + 2P^{-1}$ (5)

$\Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (5)

$\therefore Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$ (5)

35

(b)



(5)

5

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

පළමුව, $\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{1}{a(\cos\theta+i\sin\theta)}\cdot\dfrac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)}$ (5)

$=\dfrac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$

$=\dfrac{1}{a}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ (5)

එනයින් , $\left|\dfrac{1}{z_0}\right|=\dfrac{1}{a}$, and $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{1}{z_0}\right)=-\theta.$

(5) (5)

ඊළඟට , $z_0^{\,2}=a^2(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=a^2\left\{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2i\cos\theta\sin\theta\right\}$ (5)

$=a^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$ (5)

එනයින් , $\left|z_0^{\,2}\right|=a^2$, and $\mathrm{Arg}\left(z_0^{\,2}\right)=2\theta.$ (5)

(5)

40

P , C මත පිහිටයි යැයි සිතමු.

එවිට $a=1.$ (5)

$\therefore\ \left|\dfrac{1}{z_0}\right|=1$ හා Q යන්න C මත පිහිටයි. (5)

තවද , $|z_0^2|=1$ හා එනයින් C යන්න [illegible] මත පිහිටයි. (5)

15

$z_0+\dfrac{1}{z_0}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=2\cos\theta.$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

Note that $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<2\cos\theta<2$.

$\therefore\ z_0+\dfrac{1}{z_0}$ මගින් නිරූපනය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව තාත්වික වන අතර තාත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 (5)

අතර පිහිටයි..

10

---

14. (a) $x\neq 1,2$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

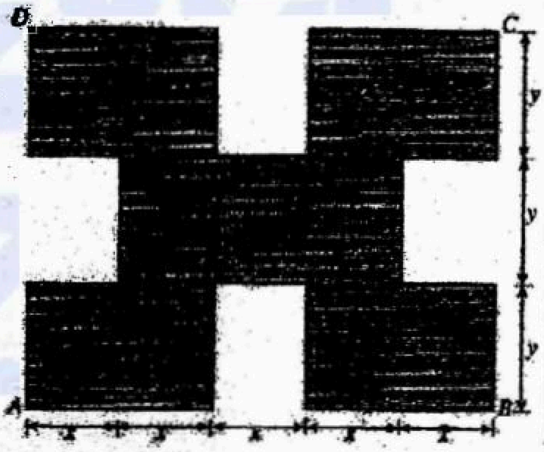
$x\neq 1,2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x)=\dfrac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}\leq 0$ අසමානතාව විසඳන්න.

(b) යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $385\ \text{m}^2$ වේ. එම පෙදෙස ලබාගෙන ඇත්තේ දිග මීටර $5x$ ද පළල මීටර $3y$ ද වූ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග මීටර y ද පළල මීටර x ද වූ සර්වසම සෘජුකෝණාස්‍ර හතරක් ඉවත් කිරීමෙනි. $y=\dfrac{35}{x}$ බව පෙන්වා, අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි මීටරවලින් මනින ලද පරිමිතිය P යන්න $x>0$ සඳහා $P=14x+\dfrac{350}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

P අවම වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.



(a) $x\neq 1,2$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

එවිට $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)2x-x^2(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ (10)

$=\dfrac{-6x^2+4x+3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$= \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2} \ ; \ (x \neq 1, 2 \text{ සඳහා}) \quad (5)$$

20

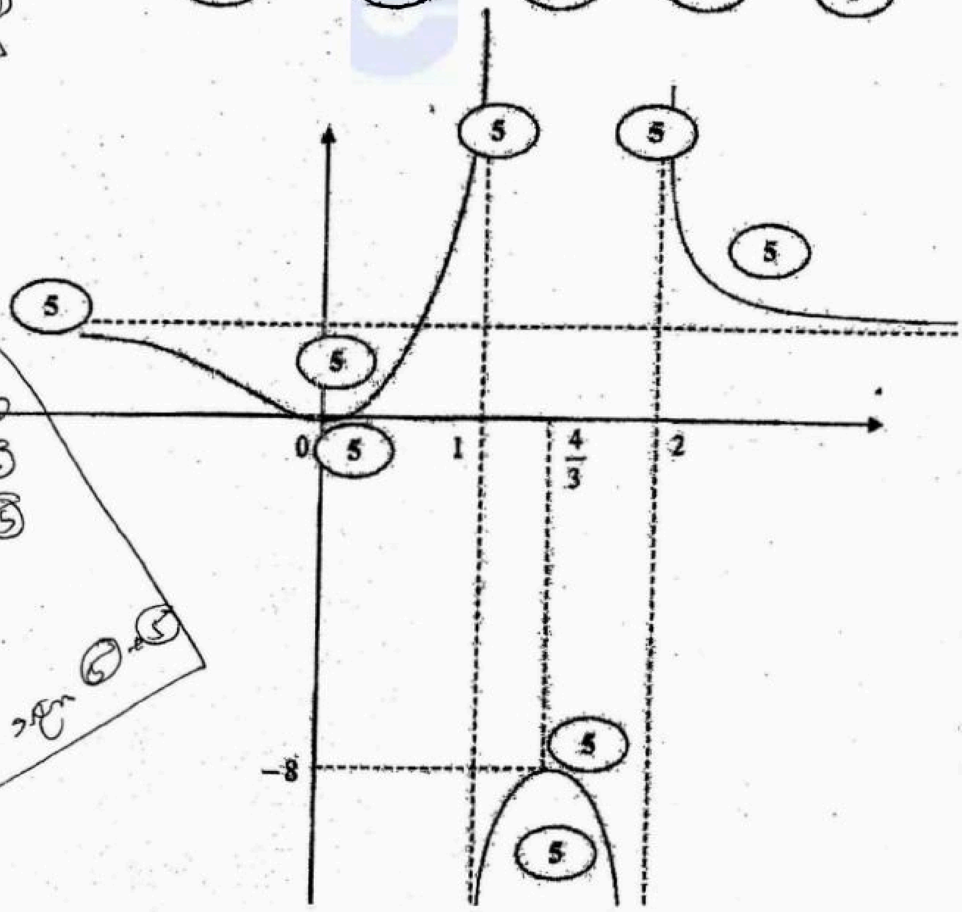
තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$. එනයින් එය $y = 1$ වේ.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \infty$ හා $\lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty$ හා $\lim_{x \to 2+} f(x) = \infty$.

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $x = 1, 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ or $x = \frac{4}{3}$. (5)

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)
	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)



උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

හැරුම් ලක්ෂ දෙකක් පවතී .: (0,0) - ස්ථානීය අවමයක් $\left(\frac{4}{3}, -8\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක්

(5) $x = 0$ or ~~$2 < x < 2$~~ $1 < x < 2$ (5) | 70 | 10

(b) වර්ගඵලය : $(5x)(3y) - 4xy = 385$ (5)

$11xy = 385$

$xy = 35$

$y = \frac{35}{x}$. (5)

පරිමිතිය $P = 2(5x + 3y) + 4x + 4y$ (5)

$= 14x + 10y$

$= 14x + \frac{350}{x};\ x > 0.$ (5)

$\frac{dP}{dx} = 14 - \frac{350}{x^2}$ (5)

$\frac{dP}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{350}{14} = 25$

(5)

$\therefore x = 5$ (5) $x = \pm 5$

$0 < x < 5$ සඳහා $\frac{dP}{dx} < 0$ හා $5 < x$ සඳහා $\frac{dP}{dx} > 0$ වේ.

(5) (5)

$x = 5$ වන විට P අවමයක් වේ. (5) | 50 |

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

15. (*a*) (i) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒ නයින්, $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int xe^{-x}\,dx$ සොයා, ඒ නයින්, $y = xe^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 1$, $x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේඛාවලින් ද ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(*b*) $c > 0$ හා $I = \displaystyle\int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. $x = c\tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්,

$I = \dfrac{\pi}{4c}\ln c + \dfrac{1}{c}J$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta$ වේ.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$I = \dfrac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(i) $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ (10)

$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$

$1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$x^0 : 1 = A$

$x^1 : 0 = 2A + B + C$ (10)

$x^2 : 0 = A + B$

$\therefore\ A = 1, B = -1$ and $C = -1.$ (10)

$\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$ (5)

(15) $= \ln|x| - \ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1} + C'$, මෙහි C' යනු අභිමත නියතයකි.

50

(ii) $\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$ (10)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C^*$, මෙහි C^* යනු අභිමත නියතයකි. (5)

(5)

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_1^2 xe^{-x}dx$ (5)

$= -(x+1)e^{-x}\Big|_1^2$ (5)

$= 2e^{-1} - 3e^{-2}.$ (5)

35

(b) $x = c\tan\theta$ යැයි ගනිමු.

එවිට $dx = c\sec^2\theta d\theta.$

$x=0$ වනවිට $\theta=0$ වන අතර $x=c$, වනවිට $\theta=\frac{\pi}{4}$ වේ.

(5)

එවිට, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2+c^2\tan^2\theta}\cdot c\sec^2\theta d\theta$ (5) (5)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2\sec^2\theta}\cdot c\sec^2\theta d\theta$ (5)

$= \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln c + \ln(1+\tan\theta)\}d\theta$ (5)

$= \frac{1}{c}\ln c\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\{1+\tan\theta\}d\theta$

$= \frac{1}{c}\ln c\cdot\theta\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{c}J$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$= \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}J.$$ (5)

35

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right) d\theta$$ (5)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left\{1 + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right\} d\theta$$ (5)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{(1 + \tan\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln 2 - \ln(1 + \tan\theta)\} d\theta$$ (5)

$$= \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} - J$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$ (5)

$$\therefore I = \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}\frac{\pi}{8}\ln 2$$ (5)

$$= \frac{\pi}{8c}\{2\ln c + \ln 2\}$$

$$= \frac{\pi}{8c}\ln(2c^2).$$ (5)

30

Alevel අපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $P \equiv (0,1)$ ලක්ෂ්‍යය $y = mx$ මගින් දෙනු ලබන l සරල රේඛාව මත නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

l ට ලම්බව P හරහා වූ සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(-mt, t+1)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

ඒ නයින්, P සිට l ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය වූ Q ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

m විචලනය වන විට, Q ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - y = 0$ මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, Q හි පථයේ දළ සටහනක් xy-තලයෙහි අඳින්න.

තව ද $R \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යය S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

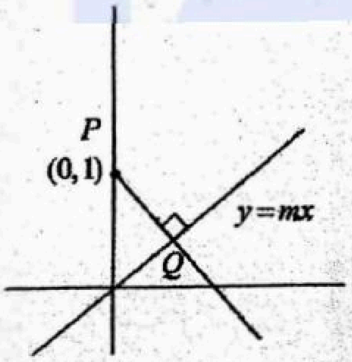
R ලක්ෂ්‍යයේ දී S බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා x-අක්ෂය මත කේන්ද්‍රය පිහිටන S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

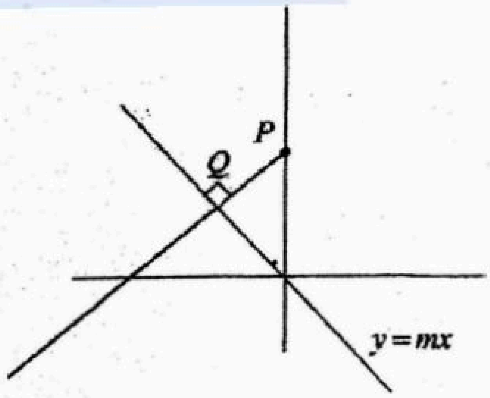
S' හි කේන්ද්‍රයම කේන්ද්‍රය ලෙස ඇතිව S අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

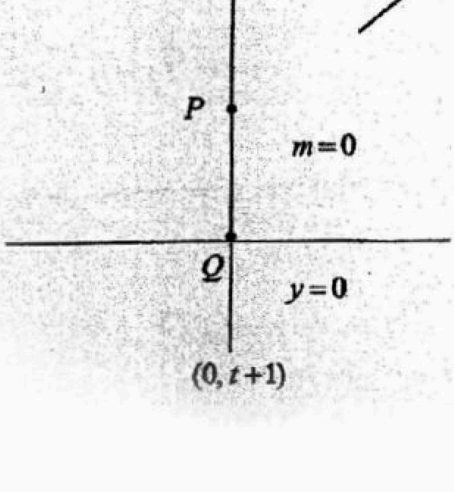
$(0,1)$ ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටයි නම් එවිට $1 = m \times 0$ ලෙස විය යුතුයි. i.e. $1 = 0$. මෙය විසංවාදයකි. (5)

$\therefore (0,1)$ යන්න l මත නොපිහිටයි. (5)

10







උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(i) අවස්ථාව : $m \neq 0$

මෙම අවස්ථාවේදී , P හරහා යන l ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය පහත ආකාර වේ.

$$y-1=-\frac{1}{m}(x-0).$$ (10)

මෙම සමීකරණයට t හඳුන්වදීමෙන් $y-1=-\frac{1}{m}(x-0)=t$ (යැයි කියමු) (5)

එවිට $y=t+1$ හා $x=-mt$,. මෙහි t යනු පරමිතියකි.
(5) (5)

එනයින් , l ට ලම්බ P හරහා යන රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(-mt, t+1)$, ආකාර ගනියි. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

(ii) අවස්ථාව $m=0$

මෙම අවස්ථාවේදී , P හරහා යන l ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය y-අක්ෂය වන අතර එනයින් එය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(0, t+1)$ ආකාර ගනියි. මෙහි t පරාමිතියක් එමනිසා සියලු m අගයන් සඳහා මෙම ආකාරය සත්‍ය වේ.. (5)

30

---

t_0 යනු Q ට අනුරූප t අගය ලෙස ගනිමු.

Q යන්න l, මත පිහිටන නිසා $t_0+1=m(-mt_0)$. (5)

(5)

$$\therefore t_0=-\frac{1}{1+m^2},$$ සහ එනයින් $Q\equiv\left(-m\left(-\frac{1}{1+m^2}\right),-\frac{1}{1+m^2}+1\right)$ (5)

$$\equiv\left(\frac{m}{1+m^2},\frac{m^2}{1+m^2}\right)$$ (5)

20

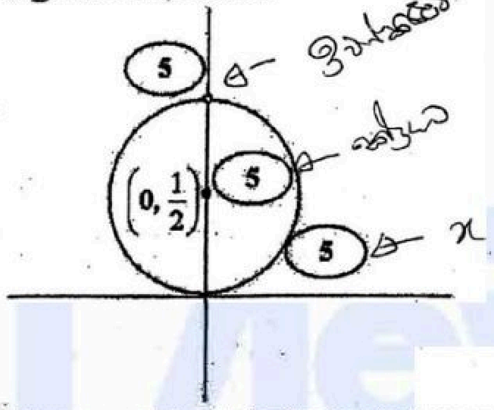
උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$x=\frac{m}{1+m^2}$, $y=\frac{m^2}{1+m^2}$ යන්න x^2+y^2-y හි ආදේශයෙන් (5)

$$x^2+y^2-y=\frac{m^2}{(1+m^2)^2}+\frac{m^4}{(1+m^2)^2}-\frac{m^2}{1+m^2}=\frac{m^2(1+m^2)}{(1+m^2)^2}-\frac{m^2}{1+m^2}=0.$$ (5)

(5)

(5) එනයින් Q යන්න S මත පිහිටයි.



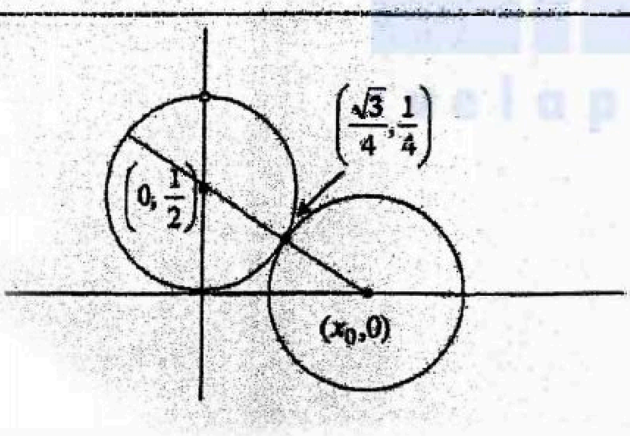
35

$x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ හා $y=\frac{1}{4}$ යන්න x^2+y^2-y හි ආදේශයෙන් (5)

$$x^2+y^2-y=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=0.$$ (5)

S මත $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$ පිහිටයි. (5)

15



15

x_0 → 10

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

එවිට x_0 යනු S' හි කේන්ද්‍රයේ

x හි ඛණ්ඩාංක ලෙස ගන්න

$$\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}}. \quad (5)$$

(5) (5)

$$\Rightarrow x_0^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}}+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}. \quad (5)$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

එනයින් S' හි සමීකරණය $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2.$ (5)

i.e. $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$

30

S අභ්‍යන්තර ව ස්පර්ශ කරන අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2. \quad (10)$$

10

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

17. (a) (i) $0° < \theta < 90°$ සඳහා $\dfrac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB = AD$, $A\hat{B}C = 80°$, $C\hat{A}D = 20°$ හා $B\hat{A}C = 60°$ වේ. $A\hat{C}D = \alpha$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\dfrac{AC}{AB} = 2\cos 40°$ බව පෙන්වන්න.

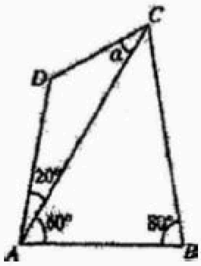
මීළඟට ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

$\sin(20° + \alpha) = 2\cos 40° \sin\alpha$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\cot\alpha = \dfrac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = 30°$ බව පෙන්වන්න.



(b) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) (i) $\dfrac{2\left\{\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right\} - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$. (5) (5) (5)

15

(ii) සයින් නීතිය භාවිතයෙන් $\dfrac{AC}{\sin 80°} = \dfrac{AB}{\sin 40°}$ (10)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2\sin 40° \cos 40°}{\sin 40°} = 2\cos 40°$ (5) (5) (5)

නැවතත් සයින් නීතිය භාවිතයෙන් $\dfrac{AC}{\sin(\alpha + 20°)} = \dfrac{AD}{\sin\alpha}$ (10)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

එනයින් , $AB = AD \Rightarrow \dfrac{\sin(20^\circ + \alpha)}{\sin\alpha} = 2\cos 40^\circ$. (5)

(5)

$\therefore \ \sin(20^\circ + \alpha) = 2\sin\alpha\cos 40^\circ$

$\Rightarrow \ \sin 20^\circ \cos\alpha + \cos 20^\circ \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos 40^\circ$ (5)

$\Rightarrow \ \cot\alpha = \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$ (5) **60**

---

(10)

$\theta = 20^\circ$ සමඟින් (i) $\Rightarrow \quad \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$ (5)

$\therefore \cot\alpha = \sqrt{3}$ (5)

(5)

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$. ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ නිසා) **25**

(b) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 4x - \sin 2x = \cos 2x - \cos 4x$ (5)

$\Leftrightarrow 2\cos 3x \sin x = 2\sin 3x \sin x$

(5) (5)

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos 3x - \sin 3x) = 0$ (5)

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad$ or $\quad \cos 3x = \sin 3x$ (5)

(5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ or $\tan 3x = 1$ (5) $(\because \cos 3x \neq 0)$ (5)

$\Leftrightarrow x = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$ හෝ $3x = m\pi + \frac{\pi}{4}$ for $m \in \mathbb{Z}$ (5)

$\Leftrightarrow x = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$ හෝ $x = \frac{m\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ for $m \in \mathbb{Z}$ (5)

50

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .