

අ.පො.ස (උ.පෙළ) විභාගය - 2019

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

(නව නිර්දේශය)

ලකුණු බෙදී යාම

I පත්‍රය

$$A \text{ කොටස} : 10 \times 25 = 250$$

$$B \text{ කොටස} : 05 \times 150 = 750$$

$$\text{එකතුව} = 1000 / 10$$

$$I \text{ පත්‍රය අවසාන ලකුණ} = 100$$

1. ගණිත අනුපාත මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n (2r-1) = n^2$ බව සාධනය කරන්න.

$$n=1 \text{ සඳහා, L.H.S.} = 2 \times 1 - 1 = 1 \text{ හා R.H.S.} = 1^2 = 1. \quad (5)$$

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n=1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඔනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙත ප්‍රතිඵලය $n=p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

$$\text{එනම් } \sum_{r=1}^p (2r-1) = p^2. \quad (5)$$

$$\text{ඇත් } \sum_{r=1}^{p+1} (2r-1) = \sum_{r=1}^p (2r-1) + (2(p+1)-1) \quad (5)$$

$$= p^2 + (2p+1)$$

$$= (p+1)^2. \quad (5)$$

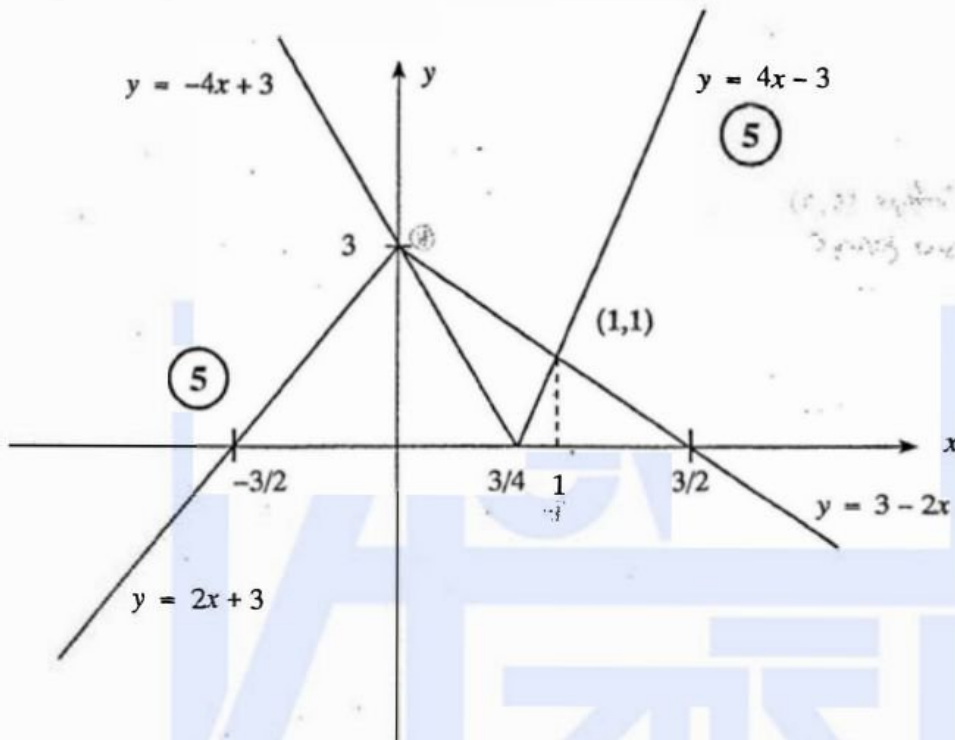
ඒ නිසින්, $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n=p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n=1$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත. එම නිසා ගණිත අනුපාත මූලධර්මය මගින් සියලුම $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

www.alevelapi.com

2. එක ම රූප සටහනක $y = |4x - 3|$ හා $y = 3 - 2|x|$ හි ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එ නමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|2x - 3| + |x| < 3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම භාවිතයීය අගයන් සොයන්න.



මෙම ප්‍රස්ථාරයෙන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යවලදී

$$4x - 3 = 3 - 2x \Rightarrow x = 1 \quad (5)$$

$$-4x + 3 = 3 + 2x \Rightarrow x = 0$$

ප්‍රස්ථාර මගින්,

$$|4x - 3| < 3 - 2|x| \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{වේ.}$$

$$\therefore |4x - 3| + |2x| < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x යන්න $\frac{x}{2}$, මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්, <

$$|2x - 3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 2. \quad (5)$$

$\therefore |2x - 3| + |x| < 3$ අසමානතාවය තෘප්ත කරන සියලු x අගයන්ගේ කුලකය

$$\{x : 0 < x < 2\} \quad \text{වේ.} \quad (5)$$

වෙනත් ක්‍රමයක්

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා $\textcircled{5} + \textcircled{5}$.

x හි අගයන් සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්

$$|2x - 3| + |x| < 3$$

(i) අවස්ථාව $x \leq 0$:

$$\text{එවිට } |2x - 3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 - x < 3$$

$$\Leftrightarrow 3x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොපවතී.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \leq \frac{3}{2}$

$$\text{එවිට } |2x - 3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 + x < 3$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

එනමින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x \leq \frac{3}{2}$ වේ.

(iii) අවස්ථාව $x > \frac{3}{2}$

$$\text{එවිට } |2x - 3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + x < 3$$

$$\Leftrightarrow 3x < 6$$

$$\Leftrightarrow x < 2$$

එනමින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $\frac{3}{2} < x < 2$ වේ.

අවස්ථා 3 ම නිවැරදි විසඳුම් සහිතව

$\textcircled{10}$

ඕනෑම අවස්ථා 2 ක් නිවැරදි විසඳුම්

සහිතව

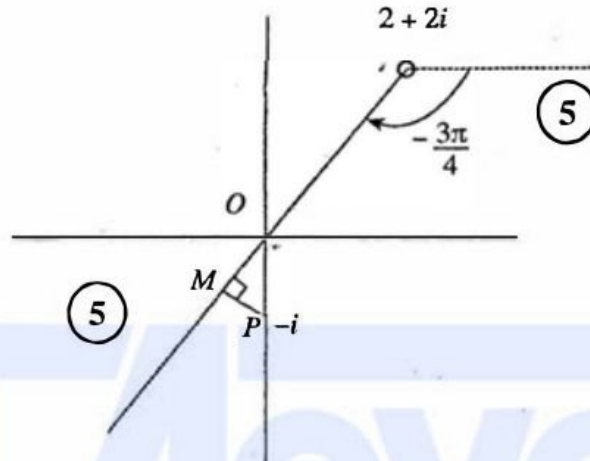
$\textcircled{5}$

ඒ නමින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x < 2$ වේ.

$\textcircled{5}$

$\boxed{25}$

3. ආගන්තික සටහනක, $\text{Arg}(z-2-2i) = -\frac{3\pi}{4}$ සමුදායයේ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පරාසයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(z-2-2i) = -\frac{3\pi}{4}$ වන පරිදි $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය සොයන්න.



$$\begin{aligned} |i\bar{z}+1| &= |i(\bar{z}-i)| = |\bar{z}-i| = |\overline{z+i}| \\ &= |z+i| \\ &= |z-(-i)| \end{aligned}$$

ඒ නමින්, $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය PM වේ.

$$\text{දැන්, } PM = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^7$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^6 හි සංගුණකය 35 බව පෙන්වන්න.

ඉහත ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වයංක්ෂිප් පදයක් නොමැති බවත් පෙන්වන්න.

$$\begin{aligned}\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^7 &= \sum_{r=0}^7 {}^7C_r (x^3)^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r} \\ &= \sum_{r=0}^7 {}^7C_r x^{5r-14}\end{aligned}\quad (5)$$

$$x^6 : 5r - 14 = 6 \Leftrightarrow r = 4. \quad (5)$$

$$\therefore x^6 \text{ හි සංගුණකය} = {}^7C_4 = 35 \quad (5)$$

ඉහත ප්‍රසාරණයට x වලින් ස්වයංක්ෂිප් පදයක් තිබීම සඳහා $5r - 14 = 0$ විය යුතුය. (5)

$r \in \mathbb{Z}^+$ බැවින් මෙය සිදුවිය නොහැක. (5)

25

www.alevelapi.com

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \frac{1}{2\pi}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\frac{\sin(\pi(x-3))}{\pi(x-3)}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad (5)$$

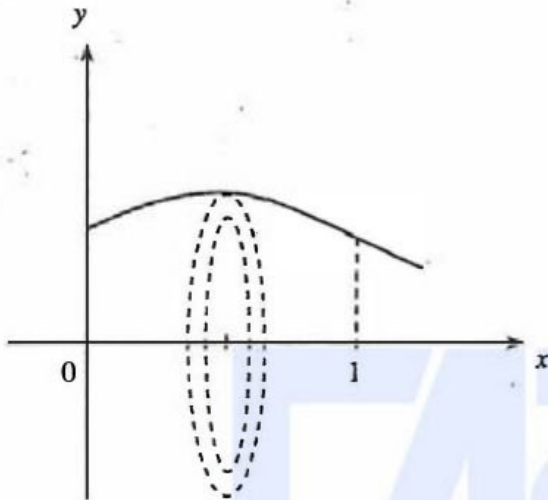
$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \quad (5)$$

25

www.alevelapi.com

6. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}$, $x=0$, $x=1$ හා $y=0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x -අක්ෂය වටා භ්‍රමනය වන විට ජනනය වන ඝනකය වන සහ වස්තුවේ පරිමාව $\frac{\pi}{4}(\pi + \ln 4)$ බව පෙන්වන්න.



$$\begin{aligned}
 \text{ජනනය වූ පරිමාව} &= \int_0^1 \pi \left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}} \right)^2 dx \quad (5) \\
 &= \pi \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \right) \quad (5) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 + \tan^{-1} x \Big|_0^1 \right) \quad (5) + (5) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} (\ln 4 + \pi) \quad (5)
 \end{aligned}$$

25

7. C යනු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = at^2$ සහ $y = 2at$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන පරාවලයක සැසි කනිමු; මෙහි $a \neq 0$ වේ. C පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්භ රේඛාවෙහි සමීකරණය $y + tx = 2at + at^3$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
- C පරාවලය මත $P \equiv (4a, 4a)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්භ රේඛාවට එම පරාවලය නැවත $Q \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍යයක දී හමු වේ. $T = -3$ බව පෙන්වන්න.

$$x = at^2, y = 2at$$

$$\frac{dx}{dt} = 2at, \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$t \neq 0 \text{ සඳහා } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2a \cdot \frac{1}{2at} = \frac{1}{t} \quad (5)$$

$$\therefore \text{අභිලම්භ රේඛාවේ බෑවුම} = -t$$

$$(at^2, 2at) \text{ හිදී අභිලම්භයේ සමීකරණය}$$

$$y - 2at = -t(x - at^2) \text{ වේ.}$$

$$y + tx = 2at + at^3 \quad (5) \quad (\text{මෙය } t = 0 \text{ සඳහා වලංගු වේ.})$$

$$P \equiv (4a, 4a) \text{ on } C \Rightarrow t = 2.$$

$$P \text{ හිදී අභිලම්භ රේඛාව : } y + 2x = 4a + 8a = 12a \quad (5)$$

$$\text{එය } C \text{ හිදී } (aT^2, 2aT) \text{ හමු වන බැවින්}$$

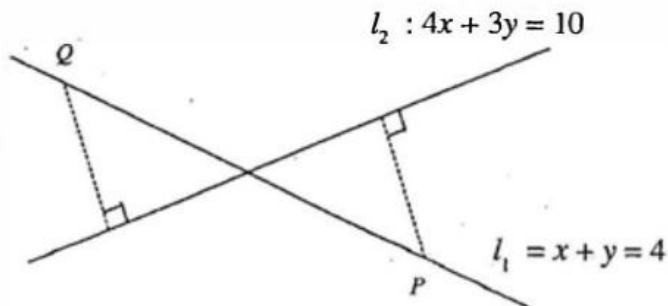
$$2aT + 2aT^2 = 12a. \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow T^2 + T - 6 = 0 \Leftrightarrow (T - 2)(T + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow T = 2 \text{ හෝ } T = -3$$

$$\therefore T = -3 \quad (5)$$

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $x + y = 4$ හා $4x + 3y = 10$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.
 P හා Q ප්‍රතික්ෂේප ලක්ෂණ දෙක l_1 රේඛාව මත පිහිටා ඇත්තේ මෙම එක් එක් ලක්ෂණයේ සිට l_2 රේඛාවට ඇති ලම්භ දුර එකක 1 ක් වන පරිදි ය. P හි හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



l_1 මත ඕනෑම ලක්ෂණයක්

$(t, 4 - t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැක; මෙහි $t \in \mathbb{R}$. (5)

$P = (t_1, 4 - t_1)$ යැයි ගනිමු.

$$P \text{ සිට } l_2 \text{ ට ලම්භ දුර} = \frac{|4t_1 + 3(4 - t_1) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$$

$$\therefore |t_1 + 2| = 5 \quad (5)$$

$$\therefore t_1 = -7 \text{ හෝ } t_1 = 3 \quad (5)$$

P හා Q හි ඛණ්ඩාංක

$$(-7, 11) \text{ හා } (3, 1) \text{ වේ. } (5) + (5)$$

25

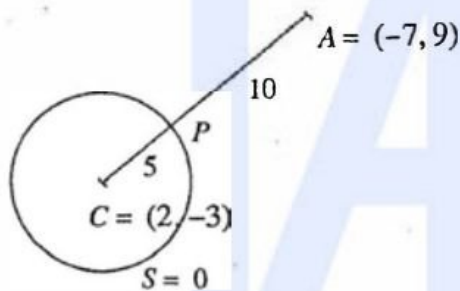
9. $A \equiv (-7, 9)$ ලක්ෂ්‍යය $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.
 $S = 0$ වෘත්තය මත වූ, A ලක්ෂ්‍යයට ආසන්නතම ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S = 0$ හි කේන්ද්‍රය C කේන්ද්‍රය $(2, -3)$ වේ. (5)

$S = 0$ හි R අරය $\sqrt{4+9+12} = \sqrt{25} = 5$ වේ. (5)

$CA^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow CA = 15 > R = 5$. (5)

$\therefore A$ ලක්ෂ්‍යය දී ඇති වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටයි.



$S = 0$ වෘත්තයට ආසන්නතම A ලක්ෂ්‍යය

CA ට $S = 0$ හමුවන P ලක්ෂ්‍ය වේ.

$CP : PA = 5 : 10$

$= 1 : 2$ (5)

$$\therefore P = \left(\frac{2 \times 2 + 1(-7)}{3}, \frac{2(-3) + 1 \times 9}{3} \right)$$

එනම් $P \equiv (-1, 1)$ (5)

25

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ සඳහා $t = \tan \frac{\theta}{2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ. $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.
 $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ බව ආපෝගනය කරන්න.

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad ; \theta \neq (2n+1)\pi \text{ සඳහා} \quad (5)$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ යැයි ගනිමු. එවිට } \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} (1+t^2) = 2(1-t^2)$$

$$(2+\sqrt{3})t^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore t^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \quad (5)$$

$$= (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow t = \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \quad (5) \quad \left(\because \tan \frac{\pi}{12} > 0 \right)$$

25

11. (a) $p \in \mathbb{R}$ හා $0 < p \leq 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 + 2x + p = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු මෙම සමීකරණයෙහි මූල යැයි ගනිමු. α හා β දෙකම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.
 p ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා

$$\frac{1}{(\alpha-1)} + \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\frac{\alpha}{\alpha-1}$ හා $\frac{\beta}{\beta-1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $(p^2+p+2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ මගින් දෙනු ලබන බවත්, මෙම මූල දෙකම ධන වන බවත් පෙන්වන්න.

(b) c හා d යනු නිශ්ශුන්‍ය තාත්ත්වික සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ද $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ යැයි ද ගනිමු. $(x-c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බවත්, $(x-d)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය cd බවත් දී ඇත. c හා d හි අගයන් සොයන්න.
 c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා, $(x+2)^2$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a) $p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් යැයි සිතමු.

$$x = 1, p^2 + 2 + p = 0 \text{ ලැබේ. } (5)$$

$$\text{නමුත් } p > 0 \Rightarrow p^2 + 2 + p > 0, \text{ බැවින් මෙය සිදු විය නොහැක. } (5)$$

$$\therefore p^2x^2 + 2x + p = 0 \text{ හි 1 මූලයක් නොවේ.}$$

10

$$\text{විවේචකය } \Delta = 2^2 - 4p^2 \cdot p (10)$$

$$= 4(1 - p^3)$$

$$\geq 0 \quad (\because 0 < p \leq 1) (5)$$

$$\therefore \alpha \text{ හා } \beta \text{ දෙකම තාත්ත්වික වේ. } (5)$$

20

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{p^2} \text{ හා } \alpha\beta = \frac{1}{p} (5) + (5)$$

දැන්,

$$\frac{1}{(\alpha-1)} + \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{1}{(\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1)} (5)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + 1}$$

$$= \frac{p^2}{p^2 + p + 2} (5)$$

20

දැන්

$$\frac{a}{a-1} + \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{a(\beta-1) + \beta(a-1)}{(a-1)(\beta-1)}$$

$$= \frac{2a\beta - (a+\beta)}{(a-1)(\beta-1)} \quad (5)$$

$$= \left(\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} \right) \cdot \frac{p^2}{p^2 + p + 2} \quad (5)$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p + 2}$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2 + p + 2} \quad (5)$$

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{a\beta}{(a-1)(\beta-1)}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p + 2}$$

$$= \frac{p}{p^2 + p + 2} \quad (5)$$

ඒ නයින් අවශ්‍ය වර්ග සමීකරණය

$$x^2 - \frac{2(p+1)}{p^2 + p + 2} x + \frac{p}{p^2 + p + 2} = 0 \text{ වේ.} \quad (10)$$

$$\Rightarrow (p^2 + p + 2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0 \quad (5)$$

35

$\frac{a}{(a-1)}$ හා $\frac{\beta}{(\beta-1)}$ යන දෙකම ඍණාත්මක වේ.

$$\frac{a}{(a-1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{2(p+1)}{p^2 + p + 2} > 0, \quad (\because p > 0), \quad (5)$$

$$\text{සහ } \frac{a}{(a-1)} \cdot \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{p}{p^2 + p + 2} > 0, \quad (\because p > 0).$$

ඒ නයින් මෙම මූල දෙකම ධන වේ.

(5)

10

(b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$

$(x-c)$ සාධකයක් බැවින් $f(c) = 0$ වේ. (5)

$\Rightarrow c^3 + 2c^2 - dc + cd = 0$ (5)

$\Rightarrow c^2(c+2) = 0$

$\Rightarrow c = -2$ ($\because c \neq 0$) (5)

$f(x)$ යන්න $(x-d)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය cd බැවින්

$f(d) = cd$. (5)

$\Rightarrow d^3 + 2d^2 - d^2 + cd = cd$ (5)

$\Rightarrow d^3 + d^2 = 0$

$\Rightarrow d^2(d+1) = 0$

$\Rightarrow d = -1$ ($\because d \neq 0$) (5)

$\therefore c = -2$ හා $d = -1$.

30

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$.

$f(x)$ යන්න $(x+2)^2$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $Ax+B$ යැයි ගනිමු.

එවිට $f(x) = (x+2)^2 Q(x) + (Ax+B)$; මෙහි $Q(x)$ මාත්‍රය 1 වූ බහු පදයකි.

එබැවින්, $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)^2 Q(x) + Ax + B$ වේ. (5)

$x = -2$, ආදේශයෙන් $0 = -2A + B$ ලැබේ. (5)

අවකලනය කිරීමෙන්

$3x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 Q'(x) + 2Q(x)(x+2) + A$ වේ. (5)

නැවත $x = -2$ ආදේශයෙන්

$12 - 8 + 1 = A$ ලැබේ. (5)

$\therefore A = 5$ හා $B = 10$

එ නිසින්, ශේෂය $5x + 10$. (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

දීර්ඝ බෙදීම මගින්

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 4x + 4 \overline{) x^3 + 2x^2 + x + 2} \\
 \underline{x^3 + 4x^2 + 4x} \\
 -2x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{-2x^2 - 8x - 8} \\
 5x + 10.
 \end{array}
 \quad (15)$$

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + 4x + 4)(x - 2) + (5x + 10)$$

∴ අවශ්‍ය ශේෂය $5x + 10$ වේ.

(10)

25

www.alevelapi.com

12. (a) P_1 හා P_2 යනු පිළිවෙළින් $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ මගින් දෙනු ලබන කුලක දෙක වැඩි මනිවු. $P_1 \cup P_2$ න් ගනු ලබන වෙනස් අකුරු 3 කින් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 කින් යුත්, අවයව 6 කින් සමන්විත මුරපදයක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත. පහත එක් එක් අවස්ථාවේ දී සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් මුරපද ගණන සොයන්න:

(i) අවයව 6 ම P_1 න් පමණක් ම තෝරා ගනු ලැබේ.

(ii) අවයව 3 ක් P_1 න් ද P_2 න් අනෙක් අවයව 3 ද තෝරා ගනු ලැබේ.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ වැඩි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ බව පෙන්වන්න.

එ නිසින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ වැඩි ගනිමු.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ බව අපේක්ෂා කරන්න.

එ නිසින්, $\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අවසරිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි අවසානය සොයන්න.

(a) $P_1 = \{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $P_2 = \{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$

(i) P_1 න් පමණක්ම වෙනස් අක්ෂර 3 ක් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස්

$$\text{අක්ෂර ගණන} = {}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \quad (10)$$

$$\text{එ නිසින්, අවයව 6 ම } P_1 \text{ ගෙන සෑදිය හැකි මුර පද ගණන} = {}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6! \quad (5)$$

$$= 28800 \quad (5)$$

20

(ii)

තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර				මුර පද ගණන
P_1 න්		P_2 න්		
අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක	අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක	
3	-	-	3	${}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6! = 28800$
2	1	1	2	${}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot 6! = 864000$
1	2	2	1	${}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot 6! = 864000$
-	3	3	-	${}^4C_3 \cdot {}^5C_3 \cdot 6! = 28800$

(10)

(10)

(10)

(10)

ඒ නයිත්, අවයව 3 ක් P_1 න් ද, අනෙක් අවයව 3 ක් P_2 න් ද තෝරාගෙන සෑදිය හැකි

$$\text{වෙනස් මුර පද ගණන} = 28800 + 864000 + 864000 + 28800 = 1785600$$

(10)

50

$$(b) U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)} \quad \text{හා} \quad V_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}; \quad r \in \mathbb{Z}^+$$

එවිට,

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)(r+4)} \quad (5)$$

$$= \frac{(r+3)(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}.$$

$$= \frac{6(r+2)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)} \quad (5)$$

$$= 6 U_r \quad (5)$$

15

එවිට,

$$r=1; \quad 6 U_1 = V_1 - \cancel{V_3},$$

$$r=2; \quad 6 U_2 = V_2 - \cancel{V_4},$$

$$r=3; \quad 6 U_3 = \cancel{V_3} - V_5,$$

$$r=4; \quad 6 U_4 = \cancel{V_4} - \cancel{V_6},$$

$\vdots$

$$r=n-3; \quad 6 U_{n-3} = V_{n-3} - \cancel{V_{n-1}},$$

$$r=n-2; \quad 6 U_{n-2} = V_{n-2} - \cancel{V_n},$$

$$r=n-1; \quad 6 U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - V_{n+1}$$

$$r=n; \quad 6 U_n = \cancel{V_n} - V_{n+2}$$

(10)

$$\therefore 6 \sum_{r=1}^n U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (5)$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n U_r = \frac{5}{144} - \frac{2n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (5)$$

40

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n W_r = \sum_{r=1}^n (U_{2r-1} + U_{2r})$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r \quad (5)$$

$$= \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n W_r = \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \quad (5)$$

10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n W_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \right) \quad (5)$$

$$= \frac{5}{144} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{5}{144} \quad (5)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r \text{ අභිසාරී වන අතර එහි ඵලය } \frac{5}{144} \text{ වේ.} \quad (5)$$

15

13.(a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ යනු $AB^T = C$ වන පරිදි වූ න්‍යාස යැයි

ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$a = 2$ හා $b = 1$ බව පෙන්වන්න.

තව ද C^{-1} නොපවතින බව පෙන්වන්න.

$P = \frac{1}{2}(C - 2I)$ යැයි ගනිමු. P^{-1} ලියා දක්වා, $2P(Q + 3I) = P - I$ වන පරිදි Q න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\operatorname{Re} z \leq |z|$, හා

(ii) $z_1 \neq 0$ සඳහා $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

බව පෙන්වන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) \leq \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ බව අපේක්ෂා කරන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) = 1$ බව සත්‍යාපනය කර,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$ යැයි ගනිමු.

$1 + \omega$ යන්න $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r(>0)$ හා $\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ද මුඛාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1 + \omega)^{10} + (1 + \bar{\omega})^{10} = 243$ බව පෙන්වන්න.

(a) $AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

(5)

(10)

$AB^T = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2a-3 = b, \quad a-4 = -2$ සහ $a = b+1$. (10)

$\Leftrightarrow a = 2$ සහ $b = 1$; (ඉහත ඕනෑම සමීකරණ දෙකකින්) මෙම අගයන් ඉතිරි

සමීකරණය ද තෘප්ත කරයි.

(5)

30

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

$\therefore C^{-1}$ නොවන. (5)

10

වෙනත් ක්‍රමයක්.

C^{-1} පැවතීම සඳහා :

$p, q, r, s \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Rightarrow p - 2r = 1, -p + 2r = 0, q - 2s = 0 \text{ හා } -q + 2s = 1$$

මෙය විසඳිය හැක.

$\therefore C^{-1}$ නොපවතී. (5)

10

$$P = \frac{1}{2} (C - 2I) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$2P(Q + 3I) = P - I$$

$$\Leftrightarrow 2(Q + 3I) = I - P^{-1} \quad (5)$$

$$\therefore 2(Q + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3I$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

30

(b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(i) $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$$\operatorname{Re} z = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad (5)$$

(ii) $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ හා $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ යැයි ගනිමු.

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]}{1} \quad (5) \quad (5)$$

$$\therefore \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (5)$$

20

$$z_1 + z_2 \neq 0 \text{ සඳහා } \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) \leq \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$$

(5) (i) මගින් (5) (ii) මගින්

10

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} = 1 \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) = 1$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) = 1 \quad (5)$$

10

$$\Rightarrow 1 = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| \quad (i) \quad (5) \text{ මගින්}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad (ii) \text{ මගින්}$$

$$= \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad (5)$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\because |z_1 + z_2| > 0)$$

ඇත් $z_1 + z_2 = 0$ එවිට

$$|z_1 + z_2| = 0 \leq |z_1| + |z_2|$$

එ නමින්, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

10

$$(c) \quad \omega = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3} i)$$

$$1 + \omega = \sqrt{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = r (\cos \theta + i \sin \theta), \quad (5)$$

$$\text{මෙහි } r = \sqrt{3} \text{ හා } \theta = -\frac{\pi}{6}. \quad (5)$$

10

$$\therefore \text{ මුඛාවර් ප්‍රමේයය මගින් } (1 + \omega)^{10} = (\sqrt{3})^{10} [\cos(10\theta) + i \sin(10\theta)] \quad (5)$$

$$1 + \bar{\omega} = \overline{1 + \omega} = \sqrt{3} (\cos \theta - i \sin \theta) = \sqrt{3} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$$

$$\Rightarrow (1 + \bar{\omega})^{10} = (\sqrt{3})^{10} [\cos(-10\theta) + i \sin(-10\theta)] \quad (5)$$

$$\therefore (1 + \omega)^{10} + (1 + \bar{\omega})^{10} = (\sqrt{3})^{10} \times 2 \cos(10\theta) \quad (5)$$

$$= 3^5 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 243. \quad (5)$$

20

14.(a) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \frac{9(x^2 - 4x - 1)}{(x - 3)^3}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 3$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ සන්න $f'(x) = -\frac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, y -අන්තඃස්ථායීතා හා හැරුම් ලක්ෂණ දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

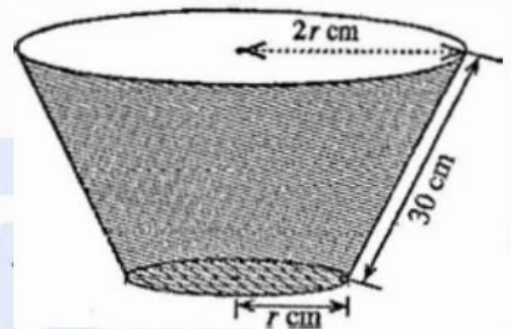
$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \frac{18(x^2 - 33)}{(x - 3)^5}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ නඟිවර්තන ලක්ෂණවල x -ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(b) යාබද රූපයෙන් පතුලක් සහිත සෘජු වෘත්තාකාර කේතු ජීන්තකයක ආකාරයෙන් වූ බේසමක් පෙන්වයි. බේසමෙහි ඇල දිග 30 cm ක් ද උඩින් වෘත්තාකාර දාරයෙහි අරය පතුලෙහි අරය මෙන් දෙගුණයක් ද වේ. පතුලේ අරය r cm යැයි ගනිමු.

බේසමේ පරිමාව $V \text{ cm}^3$ යන්න $0 < r < 30$ සඳහා

$$V = \frac{7}{3} \pi r^2 \sqrt{900 - r^2} \text{ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.}$$

බේසමේ පරිමාව උපරිම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq 3$ සඳහා ; $f(x) = \frac{9(x^2 - 4x - 1)}{(x - 3)^3}$

එවිට

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9 \left[\frac{1}{(x-3)^3} (2x-4) - \frac{3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4} \right] \quad (20) \\ &= 9 \left[\frac{2x^2 - 10x + 12 - 3(x^2 - 4x - 1)}{(x-3)^4} \right] \\ &= -\frac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4} \quad \text{for } x \neq 3 \quad (5) \end{aligned}$$

25

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0 \quad \therefore y = 0. \quad (5)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty \text{ හා } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

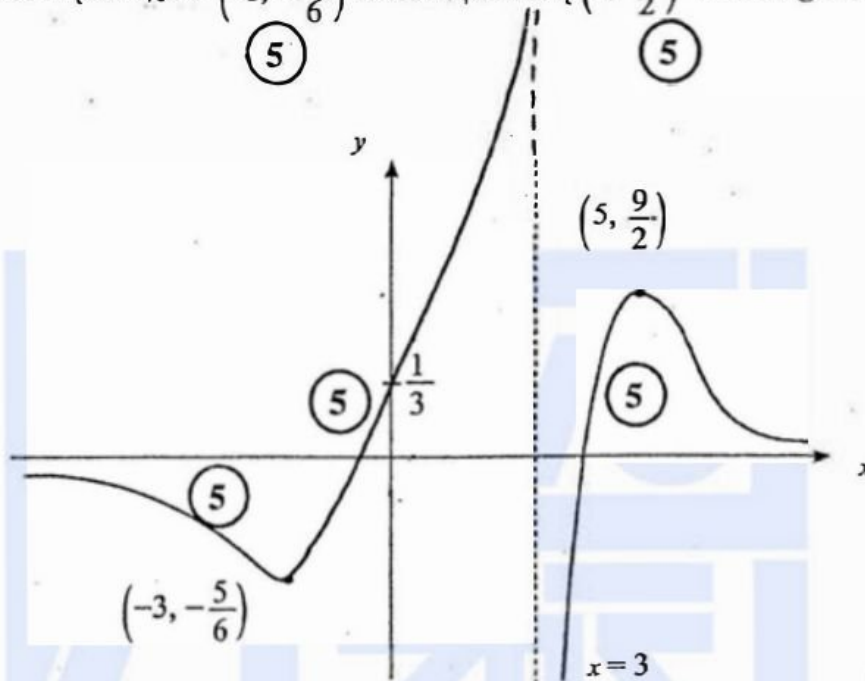
සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = 3. \quad (5)$

හැරුම් ලක්ෂණ හිදී $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = -3 \text{ හා } x = 5. \quad (5)$

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(+)	(-)

$f(x)$ is

හැරුම් ලක්ෂණ දෙකක් ඇත : $(-3, -\frac{5}{6})$ ස්ථානීය අවමයක් ද $(5, \frac{9}{2})$ ස්ථානීය උපරිමයක් ද වේ.



60

$x \neq 3$ සඳහා ;

$$f''(x) = \frac{18(x - \sqrt{33})(x + \sqrt{33})}{(x-3)^5}$$

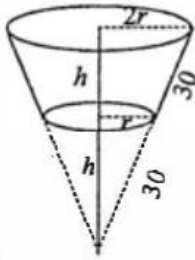
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{33}$$

	$-\infty < x < -\sqrt{33}$	$-\sqrt{33} < x < 3$	$3 < x < \sqrt{33}$	$\sqrt{33} < x < \infty$
$f''(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(-)	(+)
අවකලනාවය	යටි අවතල	උඩු අවතල	යටි අවතල	උඩු අවතල

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂණ දෙකක් ඇත. :

$x = -\sqrt{33}$ හා $x = \sqrt{33}$ එම නතිවර්තන x - බන්ධාංක වේ.

(b)



$0 < r < 30$ සඳහා ;

$$h = \sqrt{900 - r^2} \quad (5)$$

පරිමාව V සන්න

$$V = \frac{1}{3} \pi (2r)^2 \times 2h - \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{මගින් දෙනු ලැබේ.} \quad (5)$$

$$= \frac{7}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{7}{3} \pi r^2 \sqrt{900 - r^2} \quad (5)$$

15

$0 < r < 30$ සඳහා

$$\frac{dV}{dr} = \frac{7}{3} \pi \left[2r \sqrt{900 - r^2} + r^2 \frac{(-2r)}{2\sqrt{900 - r^2}} \right] \quad (5)$$

$$= \frac{7}{3} \pi \frac{[2r(900 - r^2) - r^3]}{\sqrt{900 - r^2}}$$

$$= 7\pi r \frac{(600 - r^2)}{\sqrt{900 - r^2}} \quad (5)$$

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 10\sqrt{6} \quad (\because r > 0) \quad (5)$$

$$0 < r < 10\sqrt{6} \text{ සඳහා } \frac{dV}{dr} > 0 \text{ හා } r > 10\sqrt{6} \text{ සඳහා } \frac{dV}{dr} < 0$$

(5)

(5)

$$r = 10\sqrt{6} \text{ විට } V \text{ ඉහළම වේ.} \quad (5)$$

30

15. (a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 2 \sin^2 \theta + 3$ ආදේශය භාවිතයෙන් $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}} dx$ අගයන්න.

(b) හිස්ත භාග භාවිතයෙන් $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$ සොයන්න.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$ ගැසි ගනිමු.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ බව අපේක්ෂා කරන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int \ln(x-k) dx$ සොයන්න; මෙහි k යනු භාස්තවික නියතයකි.
එ නම්, $\int f(t) dt$ සොයන්න.

(c) a හා b නියත වන විට $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x} dx \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

එ නම්, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx$ හි අගය සොයන්න.

(a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ සඳහා :

$$x = 2 \sin^2 \theta + 3 \Rightarrow dx = 4 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (5)$$

$$x = 3 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad (5)$$

$$x = 4 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

$$\text{එවිට } \int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2 \sin^2 \theta}{2 - 2 \sin^2 \theta}} \cdot 4 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2 \theta d\theta \quad (5)$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \quad (5)$$

$$= 2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \quad (5)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 \quad (5)$$

40

(b) $x \neq 1, 2$ සඳහා

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

x හි බලවල සංගුණක සැලකීමෙන් :

$$x^1 : A + B = 0 \quad (5)$$

$$x^0 : -2A - B = 1 \quad (5)$$

$$A = -1 \text{ හා } B = 1 \quad (5)$$

$$\text{එවිට } \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{-1}{(x-1)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx \quad (10)$$

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(5)

(5)

(5)

40

$$f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$= (\ln|x-2| - \ln|x-1|) \Big|_3^t \quad (5)$$

$$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2 \text{ for } t > 2. \quad (5)$$

10

$$\int \ln(x-k) dx = x \ln(x-k) - \int \frac{x}{(x-k)} dx \quad (5)$$

$$= x \ln(x-k) - \int 1 dx - \int \frac{k}{(x-k)} dx \quad (5)$$

$$= x \ln(x-k) - x - k \ln(x-k) + C \quad (5)$$

$$= (x-k) \ln(x-k) - x + C, \text{ මෙහි } C \text{ යනු අභිමත නියතයකි.}$$

15

$$\int f(t) dt = \int \ln(t-2) dt - \int \ln(t-1) dt + \int \ln 2 dt \quad (5)$$

$$= (t-2) \ln(t-2) - t - [(t-1) \ln(t-1) - t] + t \ln 2 + D$$

$$= (t-2) \ln(t-2) - (t-1) \ln(t-1) + t \ln 2 + D, \text{ මෙහි } D \text{ යනු අභිමත නියතයකි.}$$

(5)

10

$$(c) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (a + b - x) dx \quad \text{සූත්‍රය භාවිතයෙන්}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + e^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1 + e^{-x}} dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1 + e^x} dx \quad (5)$$

10

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + e^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1 + e^x} dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + e^x) \cos^2 x}{(1 + e^x)} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2x) dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (5)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + e^x} = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

25

16. $12x - 5y - 7 = 0$ හා $y = 1$ හරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

l යනු මෙම රේඛාවලින් සෑදෙන සුළු කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය යැයි ගනිමු. l හරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

P යනු l මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. P හි ඛණ්ඩාංක $(3\lambda + 1, 2\lambda + 1)$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

$B \equiv (6, 0)$ යැයි ගනිමු. B හා P ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S + \lambda U = 0$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6$ හා $U \equiv -3x - 2y + 18$ වේ.

$S = 0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය බව අපෝගණය කරන්න.

$U = 0$ යනු l ට ලම්භව, B හරහා යන හරල රේඛාවේ සමීකරණය බව පෙන්වන්න.

සියලු $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S + \lambda U = 0$ සමීකරණය සහිත වෘත්ත මත වූ ද B වලින් ප්‍රතින්න වූ ද අවල ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S = 0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය, $S + \lambda U = 0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තයට ප්‍රලම්භ වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$$12x - 5y - 7 = 0 \text{ හා } y = 1 \Rightarrow x = 1, \quad y = 1$$

$$\therefore A \equiv (1, 1)$$

(10)

10

සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{12x - 5y - 7}{13} = \pm \frac{(y - 1)}{1} \quad (10)$$

$$\Rightarrow 12x - 5y - 7 = 13(y - 1) \text{ or } 12x - 5y - 7 = -13(y - 1)$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 1 = 0 \text{ or } 3x + 2y - 5 = 0 \quad (5) + (5)$$

$y = 1$ හා $2x - 3y + 1 = 0$ අතර කෝණය සුළු θ නම්

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{2}{3} - 0}{1 + \frac{2}{3}(0)} \right| = \frac{2}{3} < 1 \text{ වේ.} \quad (5)$$

$$\therefore l: 2x - 3y + 1 = 0. \quad (5)$$

30

l මත වූ (x, y) ලක්ෂ්‍යය සඳහා

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-1)}{2} = \lambda \text{ (යැයි ගනිමු.)}$$

$$\Rightarrow x = 3\lambda + 1, y = 2\lambda + 1. \quad (5)$$

10

$$\therefore P \equiv (3\lambda + 1, 2\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{දැන් } B \equiv (6, 0) \text{ හා } P \equiv (3\lambda + 1, 2\lambda + 1)$$

$\therefore BP$ විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය

$$(x-6)(x-(3\lambda+1)) + (y-0)(y-(2\lambda+1)) = 0 \text{ මගින් දෙනු ලැබේ.} \quad (10)$$

$$\text{එනම් } (x^2 + y^2 - 7x - y + 6) + \lambda(-3x - 2y + 18) = 0 \quad (5)$$

මෙය $S + \lambda U = 0$, ආකාරයෙන් වේ. මෙහි $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6$ හා $U \equiv -3x - 2y + 18$ වේ.

(5)

(5)

25

$$S=0 \text{ යන්න } \lambda=0 \text{ ට අනුරූප වේ. } \Rightarrow P \equiv (1, 1) \equiv A. \quad (5)$$

$$\therefore S=0 \text{ යනු } AB \text{ විෂ්කම්භයක් වූ වෘත්තය වේ.} \quad (5)$$

l හි බැවුම $\frac{2}{3}$ නිසා l ට ලම්බව B හරහා යන රේඛාවේ සමීකරණය $3x + 2y + \mu = 0$ වේ;

මෙහි μ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි. (10)

$$B \text{ ලක්ෂ්‍යය } 3x + 2y + \mu = 0 \text{ මත බැවින් } 18 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -18 \quad (5)$$

$$\therefore \text{අවශ්‍ය සමීකරණය } 3x + 2y - 18 = 0 \text{ වේ.}$$

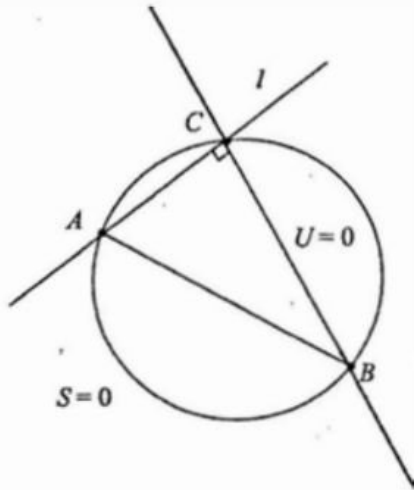
$$\text{එනම් } U = -3x - 2y + 18 = 0.$$

20

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ සඳහා } S + \lambda U = 0 \text{ යන්න } S=0 \text{ හා } U=0 \text{ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි.} \quad (10)$$

මෙම ලක්ෂ්‍ය වලින් එකක් B වන අතර අනෙක් C ලක්ෂ්‍යය l හා $U=0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ.

(10)



∴ C හි ඛණ්ඩාංක

$$u = -3x - 2y + 18 = 0$$

$$\text{හා } l = 2x - 3y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ හා } y = 3$$

$$\therefore C = (4, 3) \quad (5)$$

25

$$S = 0 \text{ හා } S + \lambda U = 0 \text{ ප්‍රලම්භ වේ.}$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(-\frac{1}{2} (3\lambda + 7) \right) \left(-\frac{7}{2} \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} (2\lambda + 1) \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = 6 + 18\lambda + 6 \quad (5) \quad (5) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 13\lambda = 26$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2.$$

(5)

www.alevelapi.com

20

17. (a) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \text{ හා}$$

$$2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

බව අපේක්ෂා කරන්න.

ඒ නමින්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $2 \sin 3\theta \cos 2\theta = \sin 7\theta$ විසඳන්න.

- (b) ABC ත්‍රිකෝණයක $BD = DC$ හා $AD = BC$ වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යය AC මත පිහිටා ඇත. $\hat{BAC} = \alpha$ හා $\hat{ACB} = \beta$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + 2\beta)$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ නම්, ඉහත (a) හි අවසාන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

- (c) $2 \tan^{-1} x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න. ඒ නමින්, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ බව පෙන්වන්න.

$$(a) \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \text{--- (1)} \quad \text{(5)}$$

$$\begin{aligned} \text{දැන් } \sin(A-B) &= \sin(A+(-B)) \quad \text{(5)} \\ &= \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B) \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \text{--- (2)} \quad \text{(5)}$$

15

$$(1) + (2) \Rightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B \quad \text{(5)}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B \quad \text{(5)}$$

10

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$2 \sin 3\theta \cos 2\theta = \sin 7\theta,$$

$$\Leftrightarrow \sin 5\theta + \sin \theta = \sin 7\theta \quad \text{(5)}$$

$$\Leftrightarrow \sin 7\theta - \sin 5\theta - \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(6\theta + \theta) - \sin(6\theta - \theta) - \sin \theta = 0$$

5

$$\Leftrightarrow 2 \cos 6\theta \sin \theta - \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta (2 \cos 6\theta - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6\theta = \frac{1}{2} \text{ since } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \sin \theta > 0$$

5

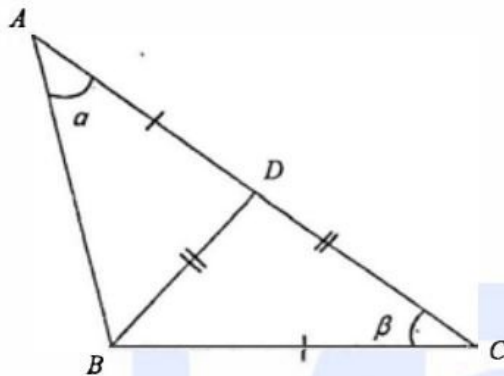
$$\Rightarrow 6\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}.. \quad (5) + (5)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}; n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \quad (5)$$

30

(b)



$$\hat{C}BD = \beta, \hat{A}DB = 2\beta,$$

$$\text{හා } \hat{A}BD = \pi - (\alpha + 2\beta)$$

සයිනස් නීතිය යෙදීමෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{BD}{\sin \hat{B}AD} = \frac{AD}{\sin \hat{A}BD} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\pi - (\alpha + 2\beta))}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\alpha + 2\beta)} \quad (5) \quad (1)$$

BDC ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{CD}{\sin \hat{D}BC} = \frac{BC}{\sin \hat{B}DC} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin 2\beta} \quad (5) \quad (2)$$

$\therefore BD = DC$ and $AD = BC$, (1) න් හා (2) න්

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin (\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta} \quad (5)$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + 2\beta). \quad (5)$$

40

$$\alpha : \beta = 3 : 2, \text{ නම්}$$

$$2 \sin \alpha \cos \frac{2\alpha}{3} = \sin \frac{7\alpha}{3} \text{ වේ. } (5)$$

$$\Rightarrow 2 \sin 3 \left(\frac{\alpha}{3} \right) \cos 2 \left(\frac{\alpha}{3} \right) = \sin 7 \left(\frac{\alpha}{3} \right) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}.$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{15\pi}{18}, \frac{21\pi}{18} \quad (5)$$

$\therefore BC = AD < AC$, α හි මෙම අගයන් විය යුතුය.

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}. \quad (5)$$

20

$$(c) \quad 2 \tan^{-1} x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

$\alpha = \tan^{-1}(x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x+1)$ යැයි ගනිමු. $x \neq \pm 1$ බව දකිමු.

$$\text{එවිට } 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\Leftrightarrow \tan 2\alpha = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \cot \beta \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{1}{x+1} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 - x \quad (\because x \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \quad (5)$$

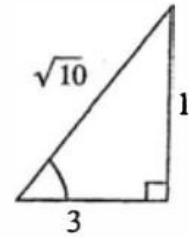
25

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \cos \left(\left(\frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) \right) = \cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right)$$

(5)



$$\therefore \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) \right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad (5)$$

10

