කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය-කළුතර

Zonal Education Office-Kalutara

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය-2023

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை-2023

General Certificate of Education (Adv.Level) Examination-2023.

13 ශ්‍රේණිය තෙවැනි වාර ඇගයීම Grade 13 Third term Evaluation

සංයුක්ත ගණිතය I Combined Mathematics I	10 S I	2023

B කොටස

23' AL API (PAPERS GROUP

* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11\. (a) $a \neq 0$ හා $b \neq 0$ විට $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α සහ β වන අතර $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල λ සහ μ වේ. $\alpha\lambda + \beta\mu$ සහ $\alpha\mu + \beta\lambda$ මූලයන් වන සමීකරණය,

$$a^2p^2x^2 - abpqx + pr(b^2 - 2ac) + ac(q^2 - 2pr) = 0$$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න නම්, $b^2 - 4ac$ සහ $q^2 - 4pr$ යන දෙකම ධන හෝ දෙකම සෘණ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x) = x^4 - (k+1)x^3 + x^2 + 3x - 5$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -3 වේ. k හි අගය සොයන්න.

k හි මෙම අගය සමඟ $f(x)$ යන්න $x^2 - 3x + 2$ න් බෙදූ විට ශේෂය $px + q$ වේ.

p හා q හි අගයන් සොයන්න. ඒ නයින් $f(x) = -3$ සමීකරණය විසඳන්න.

12\. (a) පාසලක 11 ශ්‍රේණියේ A හා B පන්ති දෙකකින් ළමුන් 8 දෙනෙක්ගෙන් සමන්විත විවාද කණ්ඩායමක් සකස් කළ යුතුව ඇත. මේ සඳහා A පන්තියෙන් පිරිමි ළමුන් 4ක් හා ගැහැණු ළමුන් 5ක් ද B පන්තියෙන් පිරිමි ළමුන් 5ක් හා ගැහැණු ළමුන් 4ක් ද සුදුසුකම් ලබා ඇත.

i. කිසිදු විශේෂත්වයක් නැතිව A පන්තියෙන් සිසුන් 4 දෙනෙක් ද B පන්තියෙන් සිසුන් 4 දෙනෙක් ද තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

ii. කණ්ඩායම තෝරා ගැනීමේදී කණ්ඩායමේ පිරිමි ළමුන් ගණන සහ ගැහැණු ළමුන් ගණන සමාන විය යුතුය. තවද A පන්තියෙන් තෝරා ගන්නා සිසුන් සංඛ්‍යාව හා B පන්තියෙන් තෝරා ගන්නා සිසුන් සංඛ්‍යාව සෑම විටම සමාන විය යුතු නම් විවාද කණ්ඩායම සඳහා සිසුන් තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{1}{re^r}$ මගින් දෙනු ලැබේ. $f(r) - f(r+1) = \dfrac{r(e-1)+e}{r(r+1)e^{r+1}}$ බව පෙන්වන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{r(e-1)+e}{r(r+1)e^{r+1}}$ යැයි ගනිමු. $S_n = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{(n+1)e^{n+1}}$ බව පෙන්වන්න.

S_∞ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$N \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $(N+1)(S_\infty - S_N) < 10^{-3}$ වේ නම්, N හි අවම අගය සොයන්න.

($\ln 10 = 2.3$ ලෙස සලකන්න.)

13. (a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ ලෙස ගන්න. $A^T B = C$ වන පරිදි a, b හා c හි අගයන් සොයන්න. මෙම අගයයන් සඳහා C^{-1} සොයන්න.

$C(P + 2I) = 4C + 15I$, සඳහා $P = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයයි.

$$\begin{aligned} 9x + 4y &= 105 \\ -4x + 3y &= 35 \end{aligned}$$

ඉහත සමගාමී සමීකරණ $PX = R$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි R නිර්ණය කළයුතු න්‍යාසයකි. ඒ හයින් එම සමගාමී සමීකරණ දෙක විසඳන්න.

(b) $z = a + ib$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. z හි මාපාංකය $|z|$, ප්‍රතිබද්ධය $\overline{z}$ හා තාත්ත්වික කොටස $Re(z)$ අර්ථ දක්වන්න.

i. $z\overline{z} = |z|^2$ සහ $z + \overline{z} = 2Re(z)$ බව පෙන්වන්න.

ii. ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $|1 + z|^2 = 1 + 2Re(z) + |z|^2$ බව පෙන්වන්න.

iii. ඉහත (ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $|z - 1|^2 = 1 - 2Re(z) + |z|^2$ බව පෙන්වන්න.

iv. $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2 + 2|z|^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

z_0 යනු $z_0 \neq \pm 1$ සහ $|z_0| = 1$ වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකි. A ලක්ෂ්‍යය ආගන්ඩ් රූපසටහනක z_0 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙළින් B සහ C ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරන $z_0 + 1$ සහ $z_0 - 1$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙක ජ්‍යාමිතිකව නිරූපණය කරන්න. $B\hat{O}C$ සෘජුකෝණයක් බව පෙන්වන්න.

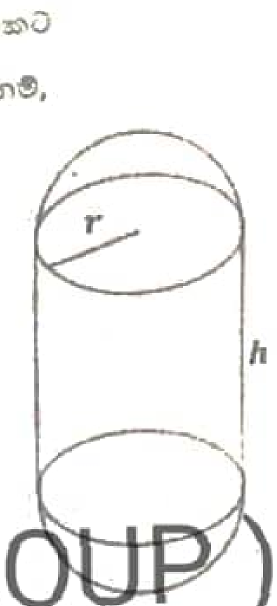
23' AL API (PAPERS GR

$\omega = 1 + \sqrt{3}i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\omega = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
$\omega^n = k \times \overline{\omega}$ තෘප්ත කරන n ට ගත හැකි කුඩාම ධන නිඛිලය, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් සොයන්න. මෙහි k තාත්ත්වික ධන සංඛ්‍යාවකි.

14. (a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු. $x \neq 1$ සඳහා $f(x)$ හි ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\dfrac{2(2x-1)}{(x-1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සහ $y-$ අන්තඃඛණ්ඩය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහන අඳින්න. $x \neq 1$ සඳහා $f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය $f''(x)$ යන්න $f''(x) = \dfrac{2(4x-1)}{(x-1)^4}$ ලෙස දී ඇත. $y = f(x)$ හි නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $k(x-1)^2 = (2x-1)^2$ සඳහා හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි k හි $(k \in \mathbb{R})$ අගයන් සොයන්න.

(b) අරය මීටර r වූ කුහර අර්ධ ගෝල දෙකක් [illegible] h [illegible] සිලින්ඩරයකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක් තනා ඇත. වස්තුවේ [illegible] පරිමාව $36\pi\ m^3$ නම්,

$h = \dfrac{108 - 4r^3}{3r^2}\ m$ බව පෙන්වන්න. සිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය තැනීමට ඒකක වර්ගඵලයක් සඳහා වියදම් රුපියල් 300 ද, ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඒකක වර්ගඵලයක් සඳහා සඳහා වියදම් රුපියල් 1000 ක් නම් සංයුක්ත වස්තුව තැනීම සඳහා රුපියල් C යන්න, $C = 800\pi\left(4r^2 + \dfrac{27}{r}\right)$ මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

15. (a) $16x^4 + 4x^3 + 16x^2 + x + 1 \equiv A(4x^2+1)^2 + Bx(4x^2+1) + Cx^2$ වන පරිදි A , B සහ C නියත සොයන්න. ඒ නයින් $\dfrac{16x^4 + 4x^3 + 16x^2 + x + 1}{x(4x^2+1)^2}$ භින්න භාග වලට වෙන්කරන්න.

ඒ නයින් $\displaystyle\int \frac{16x^4 + 4x^3 + 16x^2 + x + 1}{x(4x^2+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^3 + \sin x)\sin x \cos x\, dx = \frac{\pi}{8}(3 - 2\pi^2)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4x\, sin^2x\, dx$ සහ $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\, sin^4x\, dx$ ලෙස දී ඇත. a නියතයක් විට,

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x-a)dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $I = J$ බව පෙන්වන්න.

තවද $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\, sin^2x\, dx = \frac{\pi}{32}$ බවද පෙන්වන්න.

16.(a) $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රය පළමු වෘත්ත පාදය තුළ සම්පූර්ණයෙන් පිහිටයි. AD හා AC පාද පිළිවෙලින් $x + y - 4 = 0$ හා $3x - y - 8 = 0$ යන සරල රේඛා මත පිහිටා ඇත. AB පාදයේ දිග $2\sqrt{2}$ වේ. A ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය ලියා, ඒ නයින් AB රේඛාවේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න. A හා B ලක්ෂ්‍ය වල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. BD පාදය $x - 3y + 7 = 0$ රේඛාවට සමාන්තර වේ නම් BD හා CD පාද වල සමීකරණ සොයන්න.

(b) $(2,0)$ හා $(0,-1)$ යන ලක්ෂ්‍ය දෙක හරහා ගමන් කරන $S = 0$ නම් ඕනෑම වෘත්තයක පොදු සමීකරණය

$$S = x^2 + y^2 - \left(\frac{\lambda + 4}{2}\right)x + (\lambda + 1)y + \lambda = 0$$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙහි λ යනු පරාමිතියකි. ඒ නයින් $(1,-1)$, $(2,0)$ හා $(0,-1)$ ලක්ෂ්‍ය තුන හරහා යන $S_1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $S_1 = 0$ වෘත්තය, $S_2 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය ඡේදනය කරයි නම්, $S_2 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. ඉහත $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ යන වෘත්ත දෙකම $S = 0$ වෘත්ත පද්ධතියේ වෘත්ත වන අතර එම වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන බව දී ඇත්නම්, $\lambda_1 . \lambda_2 = -4$ බව පෙන්වන්න. λ_1 හා λ_2 යනු λ මෙන් වූ පරාමිතීන් වේ.

17.(a) $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A + B)$ ලියා දක්වන්න.

23' AL API (PAPERS GR

ඒ නයින්,

(i) $\cos 2x$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් $\cos^2 x$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

(ii) $\cos 3x$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් $\cos x$ හා $\cos^3 x$ පද ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

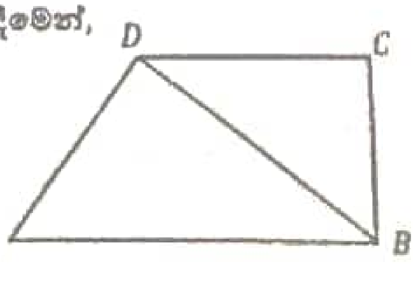
ඉහත (ii) හි $\cos 3x$ සඳහා ලියන ලද ප්‍රකාශනය භාවිතයෙන් $\sin 3x$ සඳහා ඒ වැනිම ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$ හා $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$ බව අපෝහනය කරන්න.

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා $\sin x - 3 \sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3 \cos 2x + \cos 3x$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) $ABCD$ ත්‍රපීසියමක $AB \parallel CD$, $BC \perp CD$ හා $AB > CD$ වේ. $A\hat{D}B = \theta$, $D\hat{B}A = \alpha$, $BC = p$ හා $CD = q$ යැයි ගනිමු. $BCD\Delta$ සඳහා සයින් සූත්‍රය යෙදීමෙන්,

$\sin \alpha = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ බව පෙන්වන්න. $ABD\Delta$ සඳහා සයින් සූත්‍රය යෙදීමෙන්,



$\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin \theta}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $AB = \dfrac{(p^2 + q^2) \sin \theta}{p \cos \theta + q \sin \theta}$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් $\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)} + \sin^{-1}\sqrt{x^2 + x + 1} = \dfrac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

23, AL Api
PAPERS GROUP
The best group in the telegram