"නැණ සයුර" අධ්‍යාපනික වැඩසටහන-2023

සරසවි පිවිසුම් අත්වැල

උතුරු මැද පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව

සංයුක්ත ගණිතය - I පත්‍රය

13 ශ්‍රේණිය

කාලය - පැය 03 මිනිත්තු 10

නම : ....

උපදෙස් :

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
* ***A* කොටස** (ප්‍රශ්න 1-10) සහ *B* **කොටස** (ප්‍රශ්න 11-17)
* ***A* කොටස :**

  සියලු ම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු , සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* ***B* කොටස :**

  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

23' AL API (PAPERS GROUP)

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

1) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් , සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ යන්න 17 න් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

2) එකම රූප සටහනක $y = |3 - |x||$ හා $y = |2x - 3|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. **ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ** , $|2x - 3| \leq |3 - |x||$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම තාත්වික අගයන් සොයන්න.

3) ආගන්ඩ් සටහනක $|\bar{z} + 4i| \leq 2$ අසමානතාව සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස අඳුරු කරන්න. මෙම අඳුරු කල පෙදෙසෙහි ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපනය කරනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සඳහා $\text{Arg}(z)$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

4) $(1 + x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ අනුගාමී පද තුනක සංගුණක $1:7:42$ අනුපාතයට පිහිටා ඇත. n සහ r සොයන්න.

5) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^2)}{\sin x\,(1-\sqrt{\cos x})} = 4$ බව පෙන්වන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

6) $y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(1+x^2)^2}$, x අක්ෂයෙන් ද $x = 0$ හා $x = 1$ මගින් ආවෘත වර්ගඵලය x අක්ෂය වටා රේඩියන් 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

7) $t \neq 0$ සඳහා $x^3 - y^2 = 0$මගින් දෙනු ලබන C වක්‍රයට $P \equiv (4t^2, 8t^3)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $3tx - y - 4t^3 = 0$ බව පෙන්වන්න. P හි දී වක්‍රයට අදින අභිලම්බය නැවත වක්‍රය හමුවන ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක $Q \equiv (4T^2, 8T^3)$ නම් $T = -\frac{1}{9t}$ බව පෙන්වන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

8) (2,3) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය $\frac{3}{4}$ වූ l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම l හි සිට ඒකක 3 ක දුරින් පිහිටන , l ට සමාන්තර වූ සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

9) $P \equiv (2,3)$ යනු $S = 0$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන ලක්ෂ්‍යයකි. $A \equiv (a, 5)$ හා $B \equiv (5, b)$ යනු $S = 0$ වෘත්තය මත පිහිටියා වූද පිළිවෙලින් P ට ආසන්නම හා දුරින්ම පිහිටි , $PA:AB = 2:3$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. $a = 4$ හා $b = 6$ වන බව පෙන්වන්න.තවද $S = 0$ වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP

10) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+tan^2\theta}-1}{tan\theta}$ බව පෙන්වන්න. $tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

B කොටස

11.

a) $b, c \neq 0$ සඳහා $f(x) = x^2 - bx + c$ යැයි ගනිමු. $f(x) = 0$ සමීකරණයෙහි 0 මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β හා $b^2 > 4c$ නම්, α හා β තාත්වික හා ප්‍රභින්න වන බව පෙන්වන්න.

b, c ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා ,$|\alpha| + |\beta| = \sqrt{b^2 - 2c + 2|c|}$ බව පෙන්වන්න.

තවද $1 + \frac{1}{|\alpha|}$ හා $1 + \frac{1}{|\beta|}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය

$|c|x^2 - \left(\sqrt{b^2 - 2c + 2|c|} + 2|c|\right)x + \left(\sqrt{b^2 - 2c + 2|c|} + |c| + 1\right) = 0$ බව පෙන්වන්න.

α හා β යන දෙකම ධන හෝ සෘණ නම්, $1 + \frac{1}{|\alpha|}$ හා $1 + \frac{1}{|\beta|}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය

$cx^2 - (|b| + 2c)x + (|b| + c + 1) = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) $h(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $h(x)$, $(x^2 - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $6x - 3$ නම්, $b = 4$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$, $x^2 - 3x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $kx + 4$ වේ. මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k, a හා c හි අගයන් සොයන්න.

$(x - 2), h(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

තව ද a, b, c මෙම අගයන් ගන්නා විට $h(x) = (x - p)^2(2x - q)$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. p හා q යනු නිර්ණය කල යුතු නියත වේ. $p, q \in \mathbb{R}$ වේ.

12.

a) වගුවේ පෙන්වා ඇත්තේ ජාත්‍යන්තර සම්මේලනයක් සඳහා සුදුසුකම් ලැබූ ඉංජිනේරු, වෛද්‍ය සහ ගණකාධිකාරී යන වෘත්තිකයන් විසිදෙනෙකුගේ තොරතුරු වේ.

	ගැහැණු	පිරිමි
වෛද්‍ය	4	2
ඉංජිනේරු	4	4
ගණකාධිකාරී	4	2

ඉහත වෘත්තිකයන් අතුරින් සම්මේලනය සඳහා දස දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමක් තෝරා ගත යුතුව ඇත.

I. හරියටම ගැහැණු 5 ක් සහ පිරිමි 5ක් ඇතුලත් වන කණ්ඩායම් ගණන

II. අඩුම වශයෙන් ගැහැණු 3 ක් සහ පිරිමි 5 ක් ඇතුලත් වන කණ්ඩායම් ගණන

III. එක් එක් වෘත්තිකයන්ගෙන් අඩුම වශයෙන් පිරිමි දෙදෙනෙක් සහ ගැහැණු එක් අයෙකු ඇතුලත් වන සේ සහ හරියටම පිරිමි හයදෙනෙකු සහ ගැහැණු හතරදෙනෙකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ වේ.

$U_r = f_r - f_{r+|1}$ වන පරිදි λ සොයන්න. මෙහි $f_r = \frac{\lambda}{r(r+1)}$; හා $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

එනයින් $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ නම්, $\sum_{r=1}^{n} V_r = \frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$U_r + V_r$ සොයා එනයින් $\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න. මෙහි $W_r = \frac{2r+3}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$ වේ.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍ය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP

13.

a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -2 \\ b & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ c & 5 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ.

$A^T B = C$ නම්, $a = 1$ හා $b = 3$ හා $c = -2$ බව පෙන්වන්න.

C^{-1} පවතින බව පෙන්වා එය ලියා දක්වන්න.

$C(P + 2I) = 3C + I$ වන පරිදි Pසොයන්න.

b) $z \in \mathbb{C}$ ලෙස ගනිමු.

I. $z\bar{z} = |z|^2$ බව පෙන්වන්න

ඒ නයින් $|z - 2i|^2 = |z|^2 - 4\,\mathrm{Im}(z) + 4$ බව හා
$|1 + 2iz|^2 = 1 - 4\,\mathrm{Im}(z) + 4|z|^2$ බව පෙන්වන්න.

II. $Z \neq 2i$ සඳහා $\left|\frac{1+2iz}{z-2i}\right| = 1$ **ම නම් පමණක්** $|z| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

$\left|\frac{1+2iz}{z-2i}\right| = 1$ හා $Arg(2iz) = \frac{\pi}{6}$ නම්, z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

c) $z = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$ නම් z යන්න $r(\cos\theta + i\,sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ. ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}i\right)^6 = -512$ බව පෙන්වන්න.

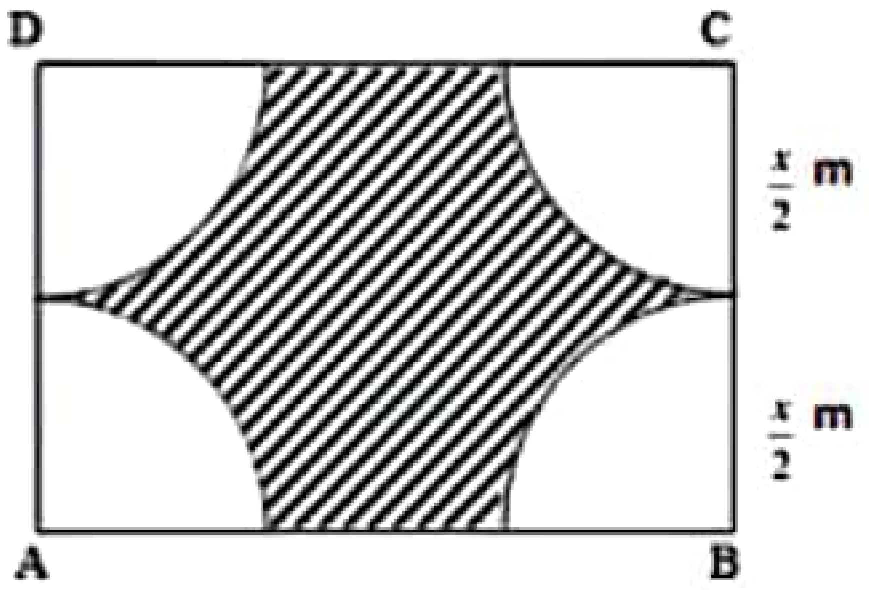
14.

a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු. .

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය වූ $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{Ax}{(x-1)^3}$ මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි A යනු නිර්ණය කල යුතු නියතයකි.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$අඩුවන ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

තව ද $f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය වූ $f''(x)$ යන්න $f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$ **බව දී ඇත**.ස්පර්ශෝන්මුඛ ,x අන්තඃඛණ්ඩය ,හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.



b) යාබද රූපයේ අඳුරු කර ඇති කොටසින් දක්වා ඇත්තේ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍ර බිම් කොටසකින් සමාන වෘත්ත කොටස් හතරක් ඉවත් කිරීමෙන් සාදා ඇති තණකොළ සිටුවා ඇති පිට්ටනියකි. වෘත්ත කොටස් වල කේන්ද්‍ර $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ ශීර්ෂ වල පිහිටා ඇති අතර අරය $\frac{x}{2}\, m$ වේ. සෘජුකෝණාස්‍රයේ පරිමිතිය $2p\ \ m$ වන අතර එහි දිග හා පළල පිළිවෙලින් $y\ m$ හා $x\ m$ වේ.

පිට්ටනියේ වර්ගඵලය $A = \left(px - \left(\frac{\pi+4}{4}\right)x^2\right)\, m^2$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $0 < x < p$ වේ.

වර්ගඵලය අවම වන $x = \frac{2p}{\pi+4}$ බව පෙන්වා ,එවිට $x : y = 2 : (\pi + 2)$ බව ද පෙන්වන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

15.

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2+4)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වන්න

එනයින් $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^2+4)} dx$ සොයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ අගයන්න.

c) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + 1)$ බව අපෝහනය කරන්න.

16.

a) $l = 3x - 4y + 15a = 0$ සරල රේඛාවේ සමීකරණය සලකමු.මෙහි $a \neq 0$ වේ. $A \equiv (a, 2a)$ සහ $B \equiv (2a, 4a)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක l රේඛාවෙන් එකම පැත්තේ පිහිටන බව පෙන්වන්න.

b) $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ නම්, $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන බව සාධනය කරන්න. lරේඛාව ස්පර්ශ කරන හා පිළිවෙලින් A හා B කේන්ද්‍ර ලෙස ඇති S_1 හා S_2 වෘත්ත වල සමීකරණ a ඇසුරෙන් සොයන්න.

සියලු $a \neq 0$ සඳහා S_1 හා S_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

දැන් $a = 2$ නම් S_1 හා S_2 වෘත්ත වල සමීකරණ ලියන්න.

A, B ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව සහ l රේඛාව ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C ලෙස ගනිමු. C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. C ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්ත වලට ඇඳි අනෙක් ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

17.

a) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1+\cot x}{1+\cot^2 x}$ ලෙස ගනිමු. $f(x) = A\cos(2x + \alpha) + B$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
$A, B, \alpha(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින් $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

b) ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA, AB පාදවල දිග පිළිවෙලින් $a, a+d, a+2d$ වේ.$Cos\ C = \frac{1}{2} - \frac{3d}{2a}$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින් $\frac{2\pi}{3} < C < \pi$ සඳහා $\frac{d}{a}$ ට තිබිය යුතු අගය පරාසය සොයන්න.

c) $(\sin^{-1} x)^3 + (\cos^{-1} x)^3 = \pi^3 a$ ලෙස ගනිමු. මෙහි $-1 \leq x \leq 1$ වේ. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\left(\sin^{-1} x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{48}(32a - 1)$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් $a \geq \frac{1}{32}$ බව අපෝහනය කරන්න.

23, AL Api
PAPERS GROUP
The best group in the telegram