[සියලු හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved]

St. Joseph's College, Colombo 10

2025 AL Final Term Evaluation – Grade 14

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

10	S	I

3 hours

විභාග අංකය					

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11-17).
- **A කොටස :**
  සියලු ම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න. එක එක ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කල හැකි ය.
- **B කොටස :**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

AL API (PAPERS GROUP)

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

CamScanner

A කොටස

01. සියලුම ධන නිඛිල සඳහා $3^{4n}5^{2n}$ යන්න 2025 බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහනය භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

AL API (PAPERS GROUP)

02. $x \neq -2$ සඳහා $\frac{|x-2|}{x+2} \leq x-2$ අසමානතාවයේ විසඳුම් සොයන්න.

CamScanner

03. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $z = i(1+i)(1-2i)^2$ යැයි ගනිමු. $\overline{z-3i} + P(z-3i) = Q\bar{z}$ වන පරිදි P හා Q සොයන්න.

04. $n \geq 5$ විට $(a-b)^n$ ප්‍රසාරණයේ පස්වන වන සහ හය වන පද වල එකතුව ශුන්‍ය නම් a/b හි අවම අගය සොයන්න.

05. $\lim_{x \to 3} \frac{\tan(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x-2}-1)}{(x-3)^2} = \frac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.

06. $y = 1 + e^x$, $x = 0$, $x = 1$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\frac{\pi}{2}(e^2 + 4e - 3)$ බව පෙන්වන්න.

CamScanner

07. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 + 2x + 5$ ලෙස ගනිමු. $y = f(x)$ වක්‍රය මත ඇති ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳ ගත හැකි ස්පර්ශකය, x - අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග සුළු කෝණයක් සාදන පරිදි a හි පරාසය සොයන්න. සොයාගත් පරාසයෙන් a හි නිඛිලමය අගය සඳහා, වක්‍රයේ නති වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

08. $x + y - 2 = 0$ සහ $2x - y + 1 = 0$ යන සරල රේඛා දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන සරල රේඛාව, කාටීසියානු තලයේ OY අක්ෂය $(0, 3)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඡේදනය කරයි නම්, එම රේඛාව OX හා OY අක්ෂ සමග මායිම් වන ත්‍රිකෝණාකාර පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

CamScanner

09. $S \equiv x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 1) = 0$ යනු විචල්‍ය වෘත්තයකි. S වෘත්තය හා $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ යන වෘත්තය P හා Q ලක්ෂ්‍යවලදී ඡේදනය වේ. PQ රේඛාව ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් හරහා ගමන් කරන බව පෙන්වන්න. එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න. ඉන්පසුව, PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පථය සොයන්න.

10. $Cos\theta[2sin\theta - tan^2\theta cosec\theta] = sec^2\theta cos2\theta$ යන සමීකරණය $\theta \in (0, \pi)$ සඳහා විසඳන්න.

B කොටස

ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $x^2 - px + q = 0$ සමීකරණයේ මූල α සහ β නම් α^2 සහ β^2 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$ බව පෙන්වන්න. $xy = q^2 + 1$ ආදේශය භාවිතයෙන් $q^2y^2 - (p^2 - 2q)(q^2 + 1)y + (q^2 + 1)^2 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න. මෙම සමීකරණයේ මූල α සහ β ඇසුරින් ලියන්න.

(b). $f(x) = ax^3 + 15x^2 + 6x - b$ යැයි ගනිමු. $(x + 1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් සහ $(x - 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 16 නම් $a = 2$ සහ $b = 7$ බව පෙන්වන්න. a සහ b මෙම අගයන් සඳහා $f(2x) = (2x + 1)(4x - 1)(2x + 7)$ බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(2x) = 17(2x + 1)$ සමීකරණයේ විසඳුම් සොයන්න.

12. (a) සමාජයක් තුළ කාන්තාවන් 8 දෙනෙකු සහ පුරුෂන් 6 දෙනෙකු සිටී. පහත සඳහන් කොන්දේසි යටතේ 7 දෙනෙකු යුත් කමිටුවක් තෝරාගනු ලැබේ.

(i) කිසිදු සීමාවක් නොමැති විට

(ii) සමාජයේ නායකයා අනිවාර්යයෙන්ම කමිටුවේ සිටිය යුතු විට

(iii) කමිටුවේ අවම වශයෙන් එක් කාන්තාවක් සිටිය යුතු විට

(iv) කමිටුවේ පුරුෂයින්ට වඩා කාන්තාවන් අඩු ගණනක් සිටිය යුතු විට

(b) $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \frac{1}{r(r+2)(r+4)(r+6)}$ හා $f(r) = \frac{1}{r(r+2)(r+4)}$ යැයි ගනිමු. $r \in Z^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = AU_r$ වන පරිදි A නියතයේ අගය සොයන්න. එනයින් $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{90} + \frac{1}{288} - \frac{1}{6(n+1)(n+3)(n+5)} - \frac{1}{6(n+2)(n+4)(n+6)}$ බව පෙන්වන්න. $r \in Z^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - U_r$ යැයි ගනිමු. $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1$ බව අපෝහනය කරන්න.එනයින් $\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (a) k යනු තාත්වික නියතයක් ද $4k \neq -1$ ද වේ. $M = \begin{pmatrix} k & k-1 \\ k-1 & k+2 \end{pmatrix}$ වන M න්‍යාසය සලකමු, මෙහි M^{-1} පවතින බව පෙන්වා එය සොයන්න.

තවද $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 3x+2 & 7 \\ 7-x & 7 \end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු.

(i) AB න්‍යාසය x මගින් සොයන්න.

(ii) $B^T A^T = C$ වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.

(iii) $7I + ACB = ADB$ වන පරිදි ඝනය 2×2 වූ D න්‍යාසය සොයන්න.

AL API (PAPERS GROUP)

CamScanner

(b). පහත දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සලකමු.

$z_1 = 2 - 2i$ $z_2 = \sqrt{3} + i$ හා $z_3 = a + bi$ මෙහි $a, b \epsilon R$ වේ. $|z_1 z_3| = 16$ ද, $arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{7\pi}{12}$ ද වේ නම්, z සංකීරණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න. a හා b හී අගයන් සොයන්න. ඒ නයින් $\frac{z_3}{z_1} = -2$ බව පෙන්වන්න. z_1, z_2 හා z_3 ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපනය කරන්න.

(c). ඩි මුවාවර් ප්‍රමේය භාවිතයෙන්, $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n(\cos n\theta - \sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න, මෙහි θ නිර්ණය කලයුතු කෝණයකි.

(i). $(\sqrt{3} - i)^m$ හුදෙක් තාත්වික ධන වන පරිදි m හි අඩුතම ධන නිඛිලය සොයන්න.

(ii). $\sqrt{3} - i$ යනු $z^9 + 16(1+i)z^3 + a + ib = 0$ හි මූලයක් නම් a හා b තාත්වික නියතයන් සොයන්න.

14. (a). $x \in R - \{3, -1\}$ සඳහා $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x+1)}$ යැයි ගනිමු. $f^1(x) = \frac{-6(x-1)}{(x-3)^2(x+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න. ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

එනයින් $x(x-2) = (x-3)(x-1)(x+1)^2$ සමීකරණයේ මූල ගණන සොයන්න.

(b). ආධාරකයේ අරය $r\ cm$, උස $h\ cm$ සහ ඇල උස $5\sqrt{3}cm$ වූ ඍජු වෘත කේතුවක පරිමාව $V\ cm^3$ වේ. $0 < h < 5\sqrt{3}$ සඳහා $V = \frac{\pi(75h - h^3)}{3}$ බව පෙන්වන්න. V වැඩිතම වන h හි අගය ද වැඩිතම පරිමාව ද සොයන්න.

15. (a) $t = \tan\frac{x}{2}$ ලෙස ගනිමු,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ හා $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos x} dx = -1$ බව පෙන්වන්න. $2\cos x = A(1-\cos x) + B$ වන පරිදි A හා B සොයන්න, ඒ නයින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\cos x}{1-\cos x} dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x \sin^{-1} 2x\ dx$ සොයන්න.

(c) භින්න භාග මගින් $\int \frac{x^3}{(x+2)(x-1)} dx$ සොයන්න.

සියලු $x \in R$ සඳහා $x^3 - x^2 - 2x - 3 \equiv x^3 + A(x+2)(x-1) + B(x+2) + C(x-1)$ හි A, B හා C සොයන්න ඒ නයින් $\int_1^3 \frac{x^3 - x^2 - 2x - 3}{(x+2)(x-1)} dx$ සොයන්න.

CamScanner

16. මූල ලක්ෂ්‍යය O සිට අඳින ලද ලම්බයක ආනතිය θ වන හා දිග p වන සරල රේඛාවක සමීකරණය $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ බව පෙන්වන්න.

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යන වෘත්තය සලකන්න. A ලක්ෂ්‍යය , මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට p ඒකක දුරින් පිහිටා ඇති අතර $x-$ අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග වාමාවර්තව $\theta\ (0 < \theta < \pi/2)$ කෝණයක් සාදයි. B යනු ධන y –අක්ෂය මත පිහිටා ඇති වෙනත් ලක්ෂ්‍යයකි. OA යනු O මූල ලක්ෂ්‍යය සිට S_1 වෘත්තයට ඇඳ ගත් ස්පර්ශකයක් වන අතර AB යනු එහි විෂ්කම්භයකි . O සිට S_1 වෘත්තයට ඇඳ ගත් ස්පර්ශක, පළමු හා දෙවන වෘත්ත පාදය තුල පිහිටා ඇත. O සිට S_1 වෘත්තයට ඇඳ ගත් ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය α නම්, $g^2 + f^2 > p^2$ සහ $\cot\theta = 2\tan(\alpha/2)$ බව පෙන්වන්න.

$\tan(\alpha/2) = \sqrt{3}/2$ සහ මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයට ඇති දුර $2\sqrt{7}$ ඒකක නම්, g, f, p සොයන්න.

S_1 වෘත්තයේ සමීකරණය ව්‍යුත්පන්න කර, $AB \equiv \sqrt{3}x + y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න. S_1 වෘත්තය, AB රේඛාව සහ මූල ලක්ෂ්‍යය O හරහා ගමන් කරන S_2 වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. S_3 වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(0, 4\sin\theta)$ වන අතර අරය ඒකක p වේ.

S_4 වෘත්තය, S_2 හා S_3 වෘත්ත බාහිරව ස්පර්ශ කරන්නේ නම්, S_4 වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $y = 3$ රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

17. (a) $\sin A, \sin B, \cos A$ සහ $\cos B$ භාවිතා කරමින් $\sin(A + B)$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියන්න. එමගින්, $\sin(A - B)$ සඳහා සමාන ප්‍රකාශනයක් අපෝහනය කරන්න. A හා B සඳහා සුදුසු අගයන් ආදේශ කර, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ බව පෙන්වන්න. ඉහත ප්‍රකාශනය භාවිතා කරමින්, $\sin(\pi/2 - A) = \cos A$ සහ $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$ බව පෙන්වන්න. එමගින්, $\cos 10° \cdot \cos 30° \cdot \cos 50° \cdot \cos 70° = 3/16$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) සම්මත අංකනයෙන්, ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ, $\hat{B} = \pi/2$ වන අතර, O යනු ත්‍රිකෝණය තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $A\hat{O}B, C\hat{O}A, C\hat{O}B$ කෝණ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි . ඒවායින් එකක් සෘජුකෝණයක් වන අතර, $C\hat{B}O = \theta$ යැයි දී ඇත.

$\cot\theta = \left(\frac{c + \sqrt{3}a}{a}\right)$ බව පෙන්වන්න. $\theta = \sin^{-1}(1/\sqrt{13})$ නම්, $OA : OC$ අනුපාතය ද සොයන්න.

(c) $\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right) = n\pi$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $n \in \mathbb{Z}$

CamScanner

AL API

PAPERS GROUP

CamScanner