1/

අනුකලනය

අනිශ්චිත අනුකලනය

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
k →	$kx + C$
x^n →	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ $(n \neq 1)$
$\frac{1}{x}$ →	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$ →	$-\cos x + C$
$\cos x$ →	$\sin x + C$
$\sec^2 x$ →	$\tan x + C$
$\sec x \tan x$ →	$\sec x + C$
$\operatorname{cosec}^2 x$ →	$-\cot x + C$
$\operatorname{cosec} x \cot x$ →	$-\operatorname{cosec} x + C$
e^x →	e^x

Sammanee

Scanned with CamScanner

$$* \int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C$$

අනුකලනයේ නීති

$$* \int \lambda f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx$$

$$* \int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

අනුකලනය කරන ක්‍රම

$$* \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int \frac{(\text{හරයේ අවකලනය})}{(\text{හරය})} \, dx = \ln |\text{හරය}| + C$$

$$* \int f(x)^n f'(x) \, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

ශ්‍රිතයක් ඇති බලයක් ඇති විට අවකලනය ඇති

$$* \int \frac{\frac{1}{2} f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \, dx = \sqrt{f(x)} + C$$

හරයේ වර්ගමූලය තුළ ඇති ශ්‍රිතයේ අවකලනයේ අර්ධයක් ලවයේ තිබිය යුතුය.

ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝ සම්බන්ධ අනුකලන

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-(bx+c)^2}}\,dx = \frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{bx+c}{a}\right) + c'$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+(bx+c)^2}\,dx = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx+c}{a}\right) + c'$$

හරයේ වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් ඇති විට

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}$ ආකාරයේ ගැටලු

$\Delta > 0 \Longrightarrow$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = \int \frac{A}{(x-\alpha)}\,dx + \int \frac{B}{(x-\beta)}\,dx$$

වර්ගජ සමීකරණයේ තාත්වික 2 ක් නම් භින්න භාග වලට කඩනු ලැබේ.

$\Delta = 0 \Longrightarrow$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2}\,dx = \int (x-\alpha)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{(x-\alpha)} + C$$

වර්ගජ ~~සමීකරණය~~ සමීකරණයට එක සමාන මූල ඇති විට මෙලෙස විසඳයි.

$\Delta < 0 \Longrightarrow$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

වර්ගජ සමීකරණය තාත්වික නොමැති විට මෙලෙස විසඳයි.

Scanned with CamScanner

පරිමේය ශ්‍රිත අනුකලනය

01) එක වරම හරයේ අවකලනය ලවයේ සාධක ගත හැකි නම් (නියතයකින් ගුණ කර හෝ බෙදා) පහත ක්‍රමය යොදනු වේ.

උදා :- $\int \frac{x^3}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-1}\,dx$

$= \frac{1}{4}\ln|x^4-1| + c$

02) හරයේ අවකලනය එකවරම ලවයේ සාධක ගැනීම දුෂ්කර නම් දී ඇති පරිමේය ශ්‍රිතය භින්න භාග වලට වෙන් කල හැකි දැයි බලන්න.

උදා :- $\int \frac{3x+7}{x^2+3x-4}\,dx = \int \frac{3x+7}{(x+4)(x-1)}\,dx$

* පසුව මෙය භින්න භාග වලට වෙන් කර අනුකලනය කරනු ලැබේ.

03) දී ඇති පරිමේය ශ්‍රිතය භින්න භාග වලට වෙන් කල නොහැකි විට,

1) හරයේ අවකලනය ලවයේ සෑදීම (මේ සඳහා හරයේ ගුණකය මඟා ලවයේ ගුණකය බෙදිය යුතුය.

උදා :- $\int \frac{4x-5}{x^2-2x+3}\,dx = 2\int \frac{2x-\frac{5}{2}}{x^2-2x+3}\,dx$

$= 2\int \frac{2x-2-\frac{1}{2}}{x^2-2x+3}\,dx = 2\left[\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2-2x+3}\,dx\right]$

$= 2\left[\ln|x^2-2x+3| - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-2x+3}}\right]$

* මෙය වෙනම අනුකලනය කර පිළිතුර ලබා ගනී.

Scanned with CamScanner

ඝාතීය ශ්‍රිතවල අනුකලනය

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^{f(x)} + c$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$$

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය

1) වර්ග පදනම ශ්‍රිත 2 ක් ගුණ වී ලැබෙන ශ්‍රිත

උදා :- xe^x , x^2e^x , $x^2\cos x$, $e^x \sin x$

2) ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත

උදා :- $\tan^{-1}x$, $\sin^{-1}x$, $\ln|x|$, $x^2\tan^{-1}x$

3) $\sec^3 x$, $\sec^5 x$ ආදී ශ්‍රිත

$$\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

* ගැටලු විසඳීමේදී මෙම ක්‍රමය උපයෝගීතාවන් කිරීමට නම් $v\frac{du}{dx}$ හි x හි සංගුණකය $u\frac{dv}{dx}$ හි x හි සංගුණකයට වඩා අඩු විය යුතුය.

උදා :- $\int x^3 e^x \, dx$

1) → $\int x^3 \frac{de^x}{dx} \, dx = x^3e^x - \int e^x \cdot 3x^2 \, dx$ ← මෙලෙස කර පසුව විසඳිය යුතුය

2) → $\int e^x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) dx = \frac{x^4 e^x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot e^x \, dx$ ← මෙම ක්‍රමය සංකීර්ණ වේ.

Scanned with CamScanner

ඩ) හරයේ මාත්‍රයට වඩා ලවයේ මාත්‍රය වැඩි හෝ සමාන වන විටදී දී ඇති පරිමේය ශ්‍රිතය නියම පරිමේය ශ්‍රිතයක් බවට පත්කර ගනී.

උදා :- $\int \frac{2x^3+3x^2+10x+9/2}{x^2+x+5}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ x^2+x+5 & 2x^3+3x^2+10x+9/2 \\ & 2x^3+2x^2+10x \\ \hline & x^2+9/2 \\ & x^2+x+5 \\ \hline & -x-1/2 \end{array}$$

$$2x^3+3x^2+10x+9/2 = (x^2+x+5)(2x+1)-(x+1/2)$$

$$\frac{2x^3+3x^2+10x+9/2}{x^2+x+5} = (2x+1) - \frac{(x+1/2)}{x^2+x+5}$$

$$\int \frac{2x^3+3x^2+10x+9/2}{x^2+x+5}\,dx = \int 2x+1\,dx - \int \frac{x+1/2}{x^2+x+5}\,dx$$

$$= 2.\frac{x^2}{2}+x - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx$$

$$= x^2+x-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+5|+C$$

** $\int \frac{a\cos\theta+b\sin\theta}{c\cos\theta+d\sin\theta}\,d\theta$ ආකාරයේ ගැටලු

ක්‍රමය

ලවය = λ(හරය) + μ(හරයේ අවකලන සංගුණකය)

එම පරිදි λ, μ නියත ඉන් සොයා ගනු ලැබේ.

පසුව මෙහි $\sin\theta$ හි හා $\cos\theta$ හි සංගුණක මගින් λ, μ සොයා ගනු ලැබේ.

$$\frac{\text{ලවය}}{\text{හරය}} = \lambda + \mu\frac{(\text{හරයේ අවකලන සංගුණකය})}{\text{හරය}}$$

$$\int \frac{\text{ලවය}}{\text{හරය}}\,dx = \lambda\int dx + \int \mu\frac{(\text{හරයේ අවකලන සංගුණකය})}{\text{හරය}}\,dx$$

$$= \lambda x + \mu\ln|\text{හරය}| + C$$

Scanned with CamScanner

උදා :- $\int e^x \sin x \, dx = \int \sin x \frac{de^x}{dx} dx$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$

$= e^x \sin x - \int \cos x \frac{de^x}{dx} dx$

$= e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right]$

$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$

$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$

$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C$

ආදේශ ක්‍රමයෙන් අනුකලනය

01) $\int \sin^m x \, dx$, $\int \cos^n x \, dx$ ආකාරයේ ගැටලු

1) m, n ඉරට්ටේ විට ආදේශ අවශ්‍ය නැත.

උදා :- $\int \cos^2 x \, dx$

$= \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int \cos 2x + \int 1 \right] dx$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$

2) m ඔත්තේ විට (Sin ට ඔත්තේ බලයක් ලැබුණ විට)
t = Cos x ආදේශ කරන්න.
n ඔත්තේ විට (Cos ට ඔත්තේ බලයක් ලැබුණ විට)
t = Sin x ආදේශ කරන්න.

උදා :- $\int \sin^3 x \, dx$

$= \int \sin^2 x \sin x \, dx$

$t = \cos x$

$\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$dt = -\sin x . dx$

Scanned with CamScanner

$$= \int (1-\cos^2 x)\sin x \, dx$$

$$= -\int (1-t^2)\, dt$$

$$= -\left[t - \frac{t^3}{3}\right] + c$$

$$= -\left[\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right] + c$$

02) $\int \sin^n x . \cos^m x \, dx$ ආකාරයේ ගැටලු

1) n, m ඉරට්ටේ විට ආදේශ අවශ්‍ය නැත.

උදා:- $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \int \frac{1-\cos 4x}{8} dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right] + c$$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\frac{\sin^2 2x}{4} = \sin^2 x \cos^2 x$

2) n ඔත්තේ නම් $t = \cos x$ ද m ඔත්තේ නම් $t = \sin x$ ද n හා m දෙකම ඔත්තේ නම් $t = \cos x$ හෝ $t = \sin x$ ද ආදේශ කරනු ලැබේ.

උදා:- $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

$t = \sin x$

$\frac{dt}{dx} = \cos x$

$dt = \cos x \, dx$

$$= \int \sin^2 x (1-\sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int t^2 (1-t^2)\, dt$$

$$= \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

Scanned with CamScanner

03) a යනු නියතයක් යැයි සිතමු. එවිට අනුකලන ගැටලුවක ඇතුළත නම්,

$\sqrt{a^2-x^2}$ ඇත්නම් $x = a\sin\theta$ ද

$\sqrt{a^2+x^2}$ ඇත්නම් $x = a\tan\theta$ ද

$\sqrt{x^2-a^2}$ ඇත්නම් $x = a\sec\theta$ ද ආදේශ කරන්න

උදා:- $\int \sqrt{9-x^2}\, dx$

$x = 3\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = 3\cos\theta$

$dx = 3\cos\theta \cdot d\theta$

$= \int \sqrt{3^2-x^2}\, dx$

$= \int \sqrt{3^2-3^2\sin^2\theta}\, dx$

$= 3\int \cos\theta \times 3\cos\theta\, d\theta$

$= 9\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{9}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$

04) වර්ගමූලයක් සහිත පරිමේය ගැටලු සඳහා විවිධ ආදේශ

$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}\, dx \longrightarrow t = cx^2+dx+e$

$\int \frac{1}{(ax+b)\sqrt{cx^2+dx+e}}\, dx \longrightarrow t = \frac{1}{ax+b}$

$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}\,(cx^2+dx+e)}\, dx \longrightarrow t = \sqrt{ax+b}$

$\int \frac{1}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}\, dx \longrightarrow t = \sqrt{cx+d}$ හෝ $t = \frac{1}{ax+b}$

ලෙස එකක් ගත යුතු වේ.

Scanned with CamScanner

- M -

පිහුකලනය

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Scanned with CamScanner

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

Scanned with CamScanner

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

* $\int \frac{a\cos x + b\sin x + d}{p\cos x + q\sin x + r}\,dx$ ආකාරයේ ගැටලු

$t = \tan \frac{x}{2}$ ආදේශය යොදන්න.

* $\int \frac{a\cos^2 x + b\sin^2 x + c}{p\cos^2 x + q\sin^2 x + r}\,dx$ ආකාරයේ ගැටලු

$t = \tan x$ ආදේශය යොදන්න.