අවකලනය

$f(x)$ ශ්‍රිතය	$f'(x)$ අවකලන සංගුණකය
nx	n
x^n	nx^{n-1}
c	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x . \tan x$
$\cot x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$
$\mathrm{cosec}\ x$	$-\mathrm{cosec}\ x . \cot x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Scanned with CamScanner

$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

මූලධර්ම මගින් අවකලනය

1) $y = nx \quad , \quad n \in \mathbb{R}$

* x හි Δx වෘද්ධියකට අනුව y හි වෘද්ධිය Δy ලෙස ගනිමු

$$y = nx \quad \text{——— (1)}$$

$$y + \Delta y = n(x + \Delta x) \quad \text{——— (2)}$$

(2) − (1) $\quad \Delta y = n(x+\Delta x) - nx$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{nx + n\Delta x - nx}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n$$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} n$$

(ප්‍රමේයක සංග්‍රහයේ මූල ඇතැක්කිරීමෙන්) $$\frac{dy}{dx} = n$$

2) $y = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{Q}$

* x හි Δx වැඩිවීමක් නිසා y හි වැඩිවීම Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = x^n \text{ ——— } ①$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \text{ ——— } ②$$

② - ① $$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x} \right]$$

ප්‍රමේයක සංග්‍රහයේ මූල ඇතැක්කිරීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$$

Scanned with CamScanner

3) $y = C$, C යනු නියතයකි.

* x හි Δx වෘද්ධියක් තුළ y හි වෘද්ධිය Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = C \quad \text{——— ①}$$

$$y + \Delta y = C \quad \text{——— ②}$$

② - ①

$$\Delta y = C - C$$

$$\Delta y = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

අවකලන සංගුණකයේ අර්ථ දැක්වීමෙන්,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

4) $y = \sin x$

* x හි වෘද්ධිය Δx ට අනුරූප y හි වෘද්ධිය Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = \sin x \quad \text{——— ①}$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \quad \text{——— ②}$$

$$② - ① \quad \Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\cos\left(x+\Delta x/_2\right)\sin\left(\Delta x/_2\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x+\Delta x/_2\right)\sin\left(\Delta x/_2\right)}{2 \times \Delta x/_2}$$

අවකලන සංගුණකයේ මූල දැක්වීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\Delta x/_2\right) \times \lim_{\Delta x/_2 \to 0} \frac{\sin\left(\Delta x/_2\right)}{\Delta x/_2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \times 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

5) $y = \cos x$

* x හි වෘද්ධිය Δx ට අනුව y හි වෘද්ධිය Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = \cos x \text{ ——— } ①$$

$$y + \Delta y = \cos(x+\Delta x) \text{ ——— } ②$$

Scanned with CamScanner

② − ① $\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$

$$\Delta y = -2\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \times \frac{\Delta x}{2}}$$

ප්‍රවකලන සාධ්‍රාගයේ පූර්ව දැනීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \times \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \times 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

⑥) $y = \tan x$

* x හි වෘද්ධිය Δx ට අදාල y හි වෘද්ධිය Δy ලෙස ගනිමු.

$y = \tan x$ ——— ①

$y + \Delta y = \tan(x+\Delta x)$ ——— ②

② − ① $\Delta y = \tan(x+\Delta x) - \tan x$

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

Scanned with CamScanner

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \sin x \cos(x+\Delta x)}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x \cos x . \cos(x+\Delta x)}$$

අවකලන සංගුණකයේ මූල දැක්වීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos x . \cos(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \times \frac{1}{\cos x . \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

7) $y = \sec x$

* x හි වෘද්ධිය Δx ට අනුරූප y හි වෘද්ධිය Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = \sec x \quad \text{——— (1)}$$

$$y + \Delta y = \sec(x+\Delta x) \quad \text{——— (2)}$$

Scanned with CamScanner

② - ① $\Delta y = \sec(x+\Delta x) - \sec x$

$$\Delta y = \frac{1}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$\Delta y = \frac{\cos x - \cos(x+\Delta x)}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{-2\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{2\times \Delta x/2 \times \cos x \cdot \cos(x+\Delta x)}$$

අවකලන සංගුණකයේ මූර්ත දැක්වීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x/2 \to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \times \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(x+\Delta x/2)}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \times \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \cdot \sec x$$

Scanned with CamScanner

ඔ) $y = \cot x$

* x හි වෙනස්වීම Δx ට අනුරූප y හි වෙනස්වීම Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = \cot x \quad \text{———} \quad (1)$$

$$y + \Delta y = \cot(x + \Delta x) \quad \text{———} \quad (2)$$

$(2) - (1)$

$$\Delta y = \cot(x + \Delta x) - \cot x$$

$$\Delta y = \frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Delta y = \frac{\cos(x+\Delta x)\sin x - \sin(x+\Delta x)\cos x}{\sin x . \sin(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{\sin(x - x - \Delta x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} \frac{1}{\sin x . \sin(x+\Delta x)}$$

ගුණිතවල සීමාවන්ගේ ප්‍රමේය භාවිතයෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sin x . \sin(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \times \frac{1}{\sin x . \sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

Scanned with CamScanner

9) $y = \operatorname{Cosec} x$

* x හි වැඩිවීම Δx ට අනුරූප y හි වැඩිවීම Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = \operatorname{Cosec} x \quad \text{——— ①}$$

$$y + \Delta y = \operatorname{Cosec}(x + \Delta x) \quad \text{——— ②}$$

② − ① $\qquad \Delta y = \operatorname{Cosec}(x+\Delta x) - \operatorname{Cosec} x$

$$\Delta y = \frac{1}{\operatorname{Sin}(x+\Delta x)} - \frac{1}{\operatorname{Sin} x}$$

$$\Delta y = \frac{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin}(x+\Delta x)}{\operatorname{Sin}(x+\Delta x)\operatorname{Sin} x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\operatorname{Cos}(x+\Delta x/2)\operatorname{Sin}(\Delta x/2)}{\operatorname{Sin} x \cdot \operatorname{Sin}(x+\Delta x) \cdot \Delta x/2 \times 2}$$

අවකලන සංගුණකයේ මූර්ත දැක්වීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{\Delta x/2 \to 0} \frac{\operatorname{Sin}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{Cos}(x+\Delta x/2)}{\operatorname{Sin} x \cdot \operatorname{Sin}(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \times \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x \cdot \operatorname{Sin} x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{Cot} x \cdot \operatorname{Cosec} x$$

Scanned with CamScanner

10) $y = e^x$

* x හි වෘද්ධිය Δx ට අනුරූප y හි වෘද්ධිය Δy ලෙස ගනිමු.

$$y = e^x \quad \text{——— (1)}$$

$$y + \Delta y = e^{(x+\Delta x)} \quad \text{——— (2)}$$

(2) − (1) $\qquad \Delta y = e^{(x+\Delta x)} - e^x$

$$\Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

දුවකලන සංග්‍රහකයේ පූර්ව දැනීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = e^x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{(\Delta x)^0}{0!} + \frac{(\Delta x)^1}{1!} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots\ldots - 1}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \ldots}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{(\Delta x)^1}{2!} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \ldots\ldots \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x (1 + 0 + 0 + \ldots\ldots)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Scanned with CamScanner

11) $y = \ln x$

$$y = \log_e x$$

$$x = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y$$

$$\frac{1}{dy/dx} = e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

කවදා හෝ,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

12) $y = \sin^{-1} x$

$$y = \sin^{-1} x$$

$$x = \sin y$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{1}{dy/dx} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

කවදා හෝ,

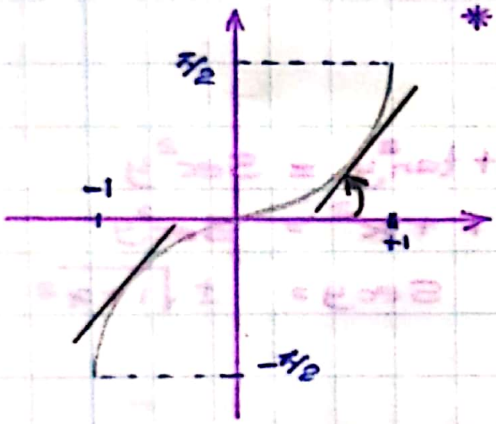
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Scanned with CamScanner

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$
$$x^2 + \cos^2 y = 1$$
$$\cos^2 y = 1 - x^2$$
$$\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

එක හෝ අනෙක අගයන්ගෙන් නිවැරදි අගය තෝරා ගත යුතුයි.



* $y = \sin^{-1}x$ හි ප්‍රධාන පරාසය $+\pi/2$ ත් $-\pi/2$ ත් අතරදී වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය ධනම $\frac{dy}{dx} > 0$ වේ.

∴ (+) හා (-) අගයන්ගෙන් (+) අගය තෝරා ගත යුතුය.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

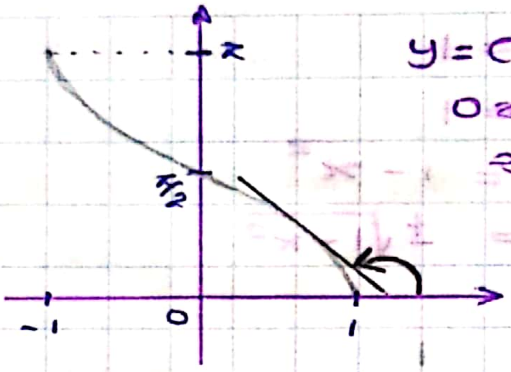
13) $y = \cos^{-1}x$

$$y = \cos^{-1}x$$
$$x = \cos y$$
$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$
$$x^2 + \sin^2 y = 1$$
$$\sin y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\left[\pm\sqrt{1-x^2}\right]}$$

Scanned with CamScanner



$y=\cos^{-1}x$ හි ප්‍රධාන පරාසය එනම් 0 ත් π ත් අතරදී වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය ඍණයි $\frac{dy}{dx}<0$ වේ.

∴ (+) හෝ (−) මූලයන්ගෙන් (−) මූලය තෝරා ගත යුතුය.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

14) $y=\tan^{-1}x$

$$y=\tan^{-1}x$$
$$x=\tan y$$

$$1+\tan^2 y = \sec^2 y$$
$$1+x^2 = \sec^2 y$$
$$\sec y = \pm\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

ගැටළු

(01) $x \geq 0$ සඳහා, $1 + \underbrace{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}_{\text{ලඝු}} \geq \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\text{වීජීය}}$ බව පෙන්වන්න.

* විජාතීය ශ්‍රිත සමානතා පරිදි සුළු කළ නොහැක.

* විජාතීය ශ්‍රිතවල අසමානතා බද්ධ කරන විට එය සුළු කිරීමෙන් කළ නොහැකි අතර නව ශ්‍රිතයක් ලෙස ගෙන දී ඇති පරාසය තුළ ප්‍රස්ථාරය ඇඳිය යුතුය.

$$1 + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \geq \sqrt{1+x^2}$$

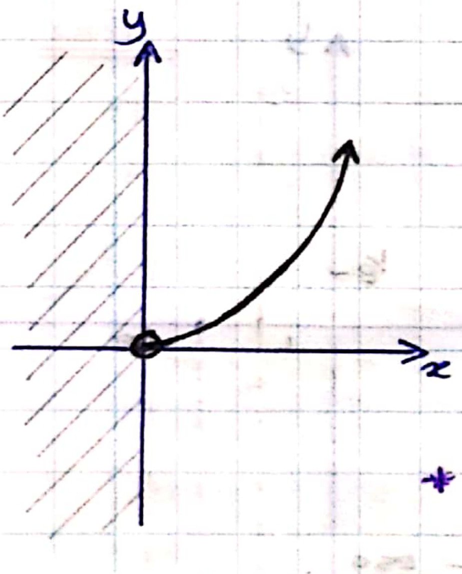
$$\underbrace{1 + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}}_{y} \geq 0$$

$$y = 1 + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x\right) + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$



$x=0$ දී $\frac{dy}{dx} = \ln(1)$
$= 0$

$x=0$ දී $y=0$ වේ.

$\therefore x=0$ හැරුම් ලක්ෂයකි.

$x>0$ දී $\frac{dy}{dx} = (+)$ වේ.

* ප්‍රස්තාරයට අනුව දී ඇති පරාසයේ $y \geq 0$ වෙමින් $x \geq 0$ වේ.

Scanned with CamScanner

පැවරුම

02) $f(x) = (x-1)(x-2)^3$

ශ්‍රිතය සාමාන්‍ය පරිදි සුළු කර ගෙන ගොස් හැරුම් ලක්ෂ්‍ය ගෙන f(x) ප්‍රස්ථාරය පහත පරිදි ලබාදිය හැක.
ඊට අනුව $|f(x)|$ ද $-f(x)$ ද $1/f(x)$ ද ප්‍රස්ථාර ඇඳිමු.