වෘත්තය

* * කේන්ද්‍රය (a, b) වන අරය r වන වෘත්තයක සමීකරණය,

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

* සම්මත වෘත්තයේ සමීකරණය,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

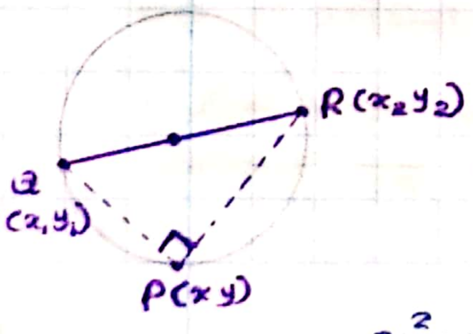
* වෘත්තයක සමීකරණයක් වීමට නම්,
  - x හා y හි දෙවන මාත්‍රයේ සමීකරණයක්ද
  - x^2 හා y^2 පදවල සංගුණක සමාන වීමද
  - xy ඇතුළත් පද නොමැති වීමද විය යුතුය.

* වෘත්තයක් වීමට නම්, $c < g^2+f^2$ විය යුතුය.

$$r^2 = g^2+f^2-c$$

කේන්ද්‍රය $= (-g, -f)$

* විෂ්කම්භයක දෙකෙළවර ඛණ්ඩාංක දී ඇති විට වෘත්තයක සමීකරණය ලබාගැනීම.



$$PQ \perp PR$$

PQ හි අනු: $\times$ PR හි අනු: $= -1$

$$\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right)\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) = -1$$

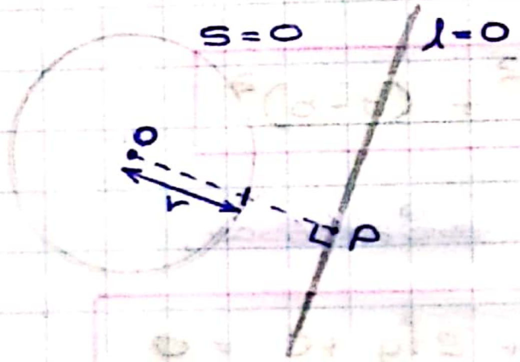
$$(y-y_2)(y-y_1) = -(x-x_1)(x-x_2)$$

$$x^2+y^2-(y_1+y_2)y-(x_1+x_2)x+y_1y_2+x_1x_2=0$$

Scanned with CamScanner

වෘත්තයක හා සරල රේඛාවක පිහිටීම

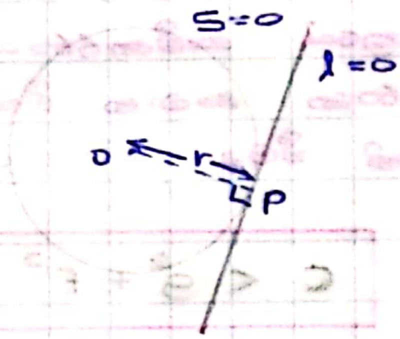
01) එකිනෙකට බාහිරින් පිහිටයි.



අවශ්‍යතාවය,

$OP > r$

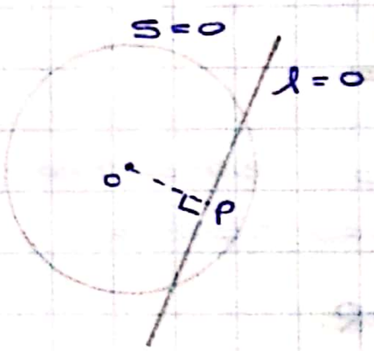
02) රේඛාව හා වෘත්තය ස්පර්ශව ඇත.



අවශ්‍යතාවය

$OP = r$

03) ඒවා එකිනෙක ඡේදනය වේ.



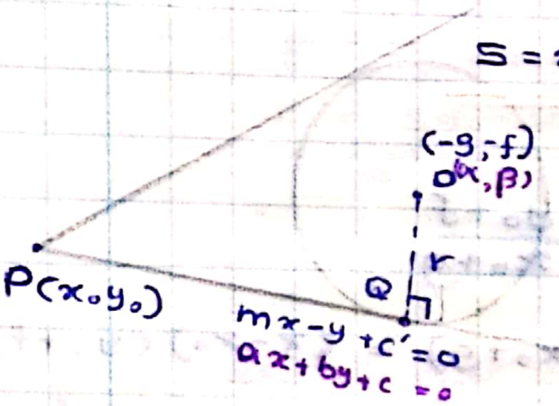
අවශ්‍යතාවය

$OP < r$

Scanned with CamScanner

* බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශක වල සමීකරණ,

$$S = x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$



මෙහි එක් ස්පර්ශකයක් $y = mx + c'$ ලෙස ගනිමු.

එය $P(x_0,y_0)$ හරහා යන නිසා.

$$y_0 = mx_0 + c'$$

$$c' = -mx_0 + y_0 \quad \text{——— ①}$$

රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරන නිසා,

$OQ = r$ විය යුතුය.

$$\frac{|\alpha a + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{g^2+f^2-c}$$

$$\frac{|m(-g)-(-f)+c'|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{g^2+f^2-c} \quad \text{——— ②}$$

① න් ② ට ආදේශ කර c' ඉවත් කළ විට m හි වර්ගජ සමීකරණයක් ලැබේ.

එනම් m හි අගයන් 2 න් සමීකරණ 2 ක් ලැබේ.

- $\Delta m^2 > 0$ නම් m සඳහා අගයන් 2 කි. වෘත්තයට බාහිරින් P පිහිටයි.

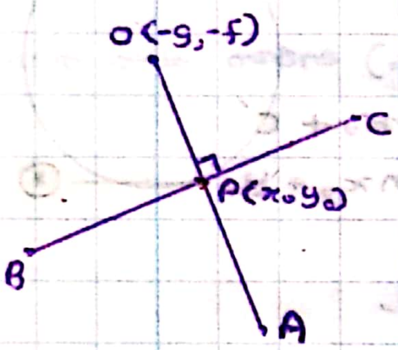
- $\Delta m^2 = 0$ නම් m සඳහා 1 ක් අගයකි. වෘත්තය මත P පිහිටයි.

- $\Delta m^2 < 0$ නම් m සඳහා තාත්වික අගයන් නැත. වෘත්තය තුළ P පිහිටයි.

Scanned with CamScanner

* වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය හා අභිලම්බය

අභිලම්බයේ සමීකරණය



$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_0+f}{x_0+g}$$

$$(y-y_0)(x_0+g) = (x-x_0)(y_0+f)$$

$$y x_0 + yg - y_0 x_0 - y_0 g = x y_0 + xf - x_0 y_0 - x_0 f$$

$$(g+x_0)y - (y_0+f)x + x_0 f - y_0 g = 0$$

ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

OA හි අනු: $= \frac{(y_0+f)}{(x_0+g)}$

[OA ⊥ BC නිසා,]

BC හි අනු: $= -\frac{(x_0+g)}{(y_0+f)}$

BC හි සමීකරණය

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = -\frac{(x_0+g)}{(y_0+f)}$$

$$(x_0-x)(x_0+g) = (y-y_0)(y_0+f)$$

$$x_0^2 + x_0 g - x x_0 - xg = y y_0 + yf - y_0^2 - y_0 f$$

① ——— $0 = y y_0 - y_0^2 - x_0^2 + yf - y_0 f + xg + x x_0 - x_0 g$

(x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය මත නිසා,

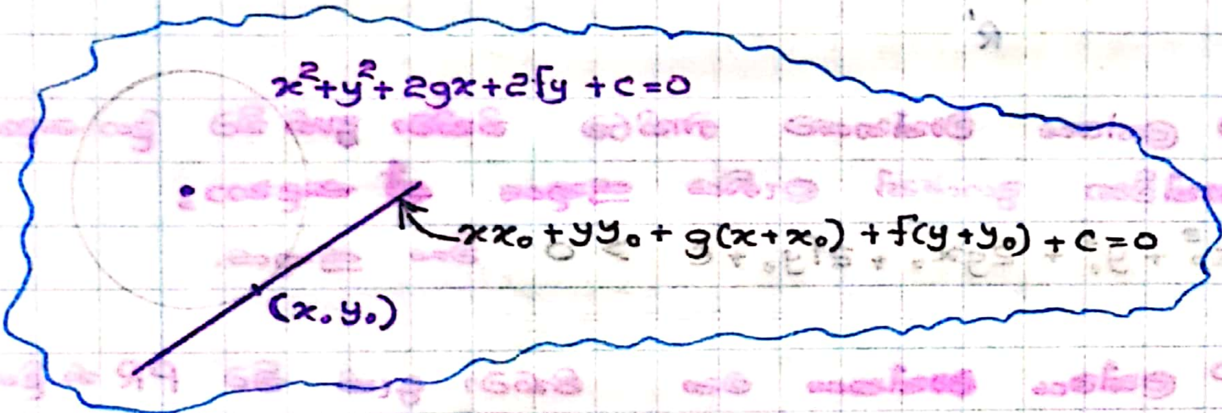
$$0 = x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c$$

$$-(x_0^2 + y_0)^2 = 2gx_0 + 2fy_0 + c$$

① ට ආදේශයෙන්,

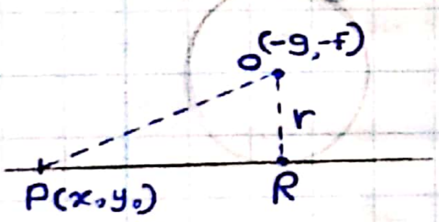
$$0 = yy_0 + yf - y_0 f + xg + xx_0 - x_0 g + 2gx_0 + 2fy_0 + c$$

$$\boxed{0 = xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c}$$



බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග

$$S = x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$



$$PO^2 = (x_0+g)^2 + (y_0+f)^2$$

$$OR^2 = r^2$$
$$= g^2 + f^2 - c$$

පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$PR^2 = PO^2 - OR^2$$

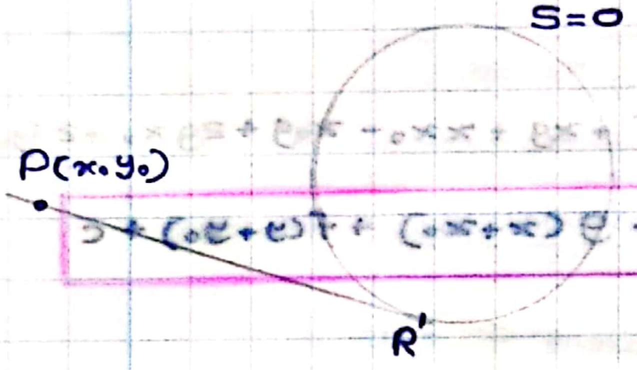
$$PR^2 = (x_0+g)^2 + (y_0+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$

$$PR^2 = x_0^2 + 2gx_0 + g^2 + y_0 + 2y_0 f + f^2 - g^2 - f^2 + c$$

$$\boxed{PR = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c}}$$

Scanned with CamScanner

වෘත්තයක් අනුබද්ධයෙන් ලක්ෂ්‍යයක පිහිටීම



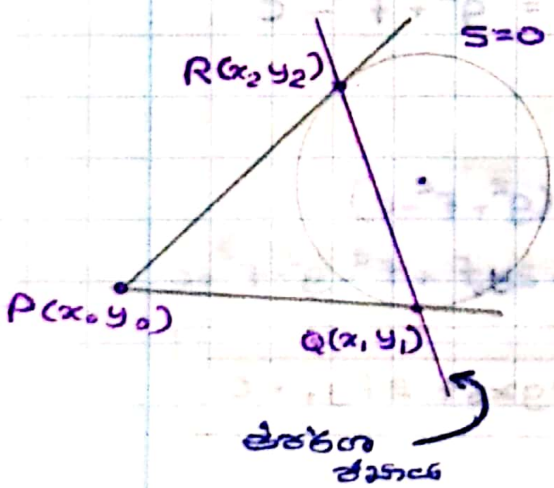
$$PR = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c}$$

* P ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට බාහිරව පිහිටා ඇති විට දිග සඳහා තාත්වික අගයක් ලැබිය යුතුය. ඒ සඳහා; $x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c > 0$ විය යුතුය.

* P ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත පිහිටා ඇති විට PR හි දිග ශූන්‍ය විය යුතුය. ඒ සඳහා $x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c = 0$ විය යුතුය.

* P ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය තුළ පිහිටා ඇතිවිට PR දිග පැවතිය නොහැක. ඒ සඳහා; $x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c < 0$ විය යුතුය.

** ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය



ප්‍රමේයය → P(x₀,y₀) ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$ වෘත්තයේ ස්පර්ශ ජ්‍යාය,

$$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$$

වේ.

Scanned with CamScanner

සාධනය

$Q \equiv (x_1, y_1)$, $R \equiv (x_2, y_2)$ ලෙස ගනිමු.

$Q \equiv (x_1, y_1)$ හිදී ඇදි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය,

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$$

මෙය $P(x_0, y_0)$ හරහා යන නිසා,

$$x_0x_1 + y_0y_1 + g(x_0+x_1) + f(y_0+y_1) + c = 0 \quad \text{——— (1)}$$

R හිදී ඇදි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය,

$$xx_2 + yy_2 + g(x+x_2) + f(y+y_2) + c = 0$$

මෙය $P(x_0, y_0)$ හරහා යන නිසා,

$$x_0x_2 + y_0y_2 + g(x_0+x_2) + f(y_0+y_2) + c = 0 \quad \text{——— (2)}$$

$$xx_0 + yy_0 + g(x+x_0) + f(y+y_0) + c = 0$$ සලකමු

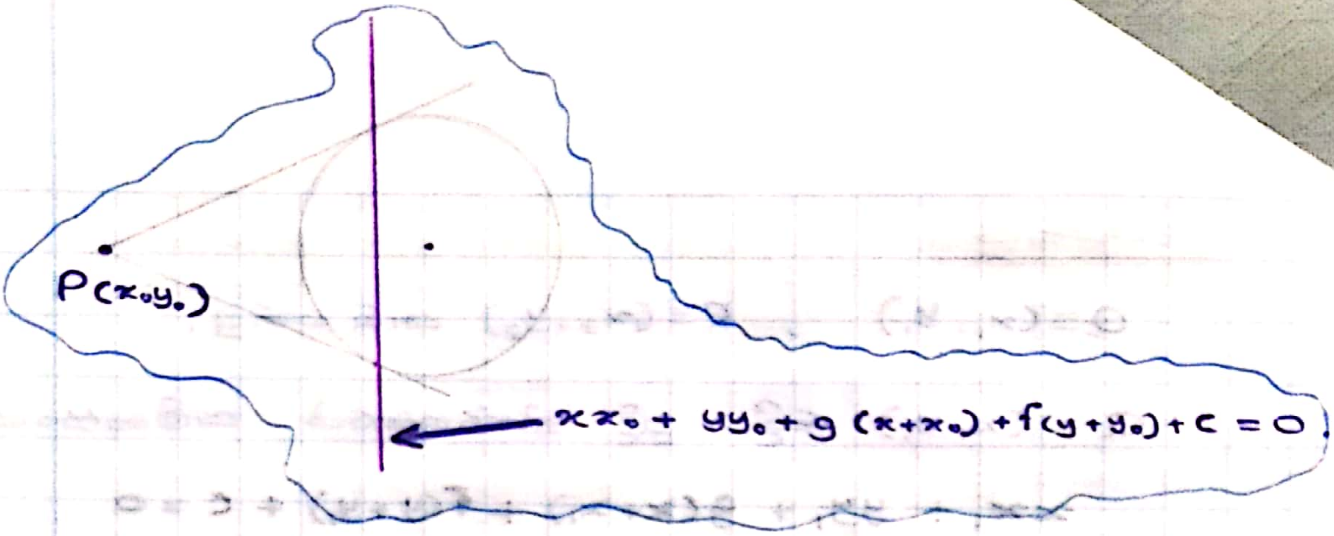
මෙය x හා y හි ඒකජ සමීකරණයකි. එම නිසා මෙමගින් සරල රේඛාවක් නිරූපණය වේ.

(1) ට අනුව මෙය $Q \equiv (x_1, y_1)$ හරහා යයි.

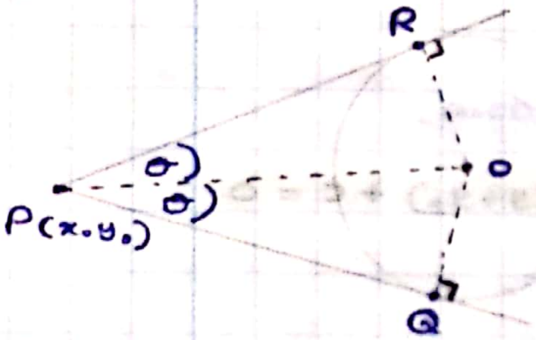
(2) ට අනුව මෙය $R \equiv (x_2, y_2)$ හරහා යයි.

* ඉමුල ලක්ෂ්‍ය දෙක හරහා යන එකම එක සරල රේඛාවක් පවතී. ∴ මෙය QR ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය විය යුතුය.

Scanned with CamScanner



බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳින ලද ස්පර්ශක අතර කෝණය



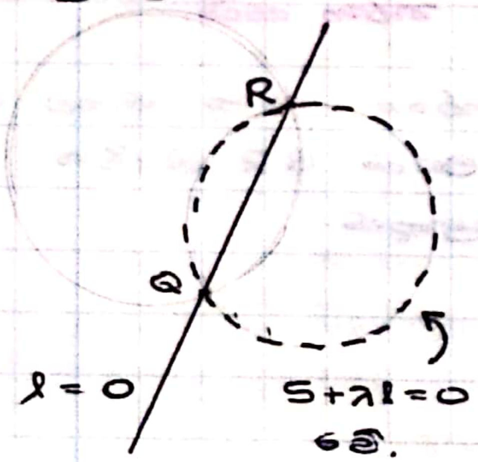
$$\tan\theta = \frac{OR}{PR}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{OR}{PR}\right]$$

ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය $= 2\theta$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+2gx_0+2fy_0+c}}\right]$$

වෘත්තයක හා සරල රේඛාවක ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය



උපකල්පනය → $S = x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ වෘත්තයෙන්, $l = px+qy+r=0$ සරල රේඛාවෙන් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක්.

$S+\lambda l=0$ ලෙස ලිවිය හැක

සාධනය

$Q \equiv (x_1, y_1)$ $R \equiv (x_2, y_2)$ ලෙස ගනිමු.

$Q(x_1,y_1)$, $S=0$ මත නිසා,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \text{———} \ (1)$$

$Q(x_1,y_1)$, $l=0$ මත නිසා,

$$px_1 + qy_1 + r = 0 \quad \text{———} \ (2)$$

$S + \lambda l = 0$ සලකමු.

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(px+qy+r) = 0$$

$$x^2+y^2+(2g+\lambda p)x+(2f+\lambda q)y+c+\lambda r = 0$$

මෙය $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ආකාරයේ වේ.
∴ මෙමගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වේ. ——— (3)

$S+\lambda l=0$, $Q\equiv(x_1,y_1)$ හරහා යයි නම්,

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c+\lambda(px_1+qy_1+r)=0$ විය යුතුය.

$$\text{L.H.S.} = \underbrace{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}_{=0 \ (1) \text{ න්}} + \lambda\underbrace{(px_1+qy_1+r)}_{=0 \ (2) \text{ න්}}$$

$$= 0 + \lambda(0)$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

∴ $S+\lambda l=0$, $Q\equiv(x_1,y_1)$ හරහා යයි. ——— (4)

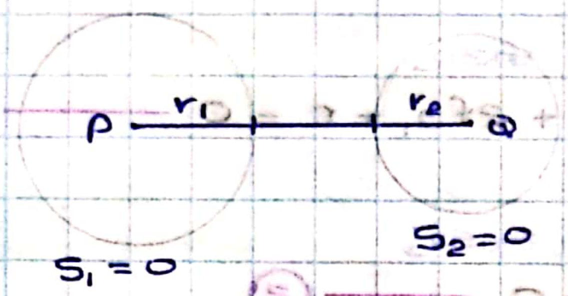
එලෙසම $R(x_2,y_2)$ හරහා ද යන බව පෙන්විය හැක. ——— (5)

∴ (3), (4), (5) ට අනුව $S+\lambda l=0$ මගින් R හා Q හරහා යන වෘත්ත කුලකයක් නිරූපණය වේ.

Scanned with CamScanner

ද්විමාන තලයේ වෘත්ත දෙක පිහිටීම

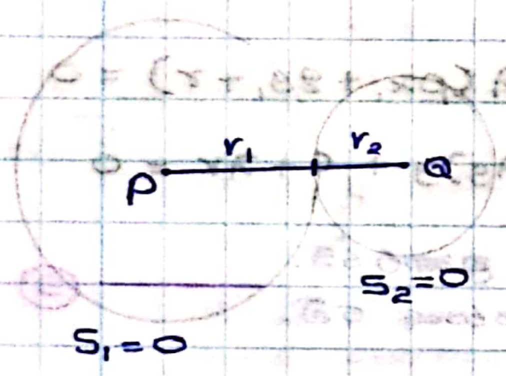
01) එකිනෙකට බාහිරින් පිහිටයි.



අවශ්‍යතාවය

$$PQ > r_1 + r_2$$

02) බාහිරව ස්පර්ශ වීම.



අවශ්‍යතාවය

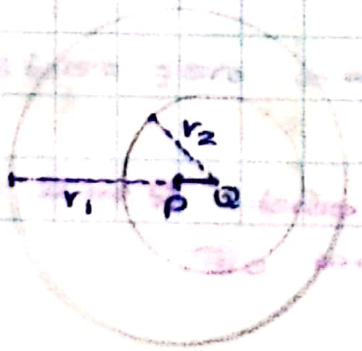
$$PQ = r_1 + r_2$$

03) අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වීම

අවශ්‍යතාවය

$$PQ = |r_1 - r_2|$$

04) අන්තර්ගත වීම

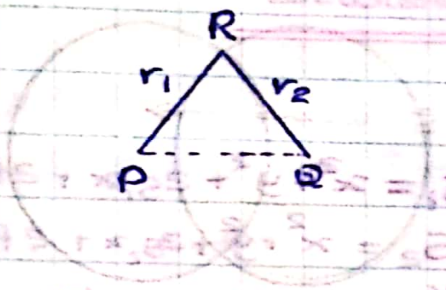


අවශ්‍යතාවය

$$PQ < |r_1 - r_2|$$

Scanned with CamScanner

05) ඡේදනය වීම



ප්‍රතිබන්ධනය

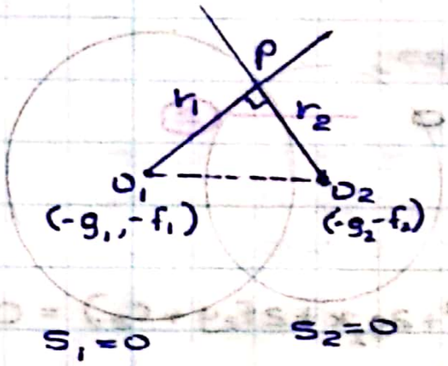
$$|r_1-r_2| < PQ < r_1+r_2$$

ප්‍රලම්බව ඡේදනය

ප්‍රමේයය ⟶ $S_1 = x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ හා $S_2 = x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම්,

$$\boxed{2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2}$$ වේ.

සාධනය



පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$O_1O_2^2 = PO_1^2 + PO_2^2$$

$$(-g_1+g_2)^2+(-f_1+f_2)^2 = g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2$$

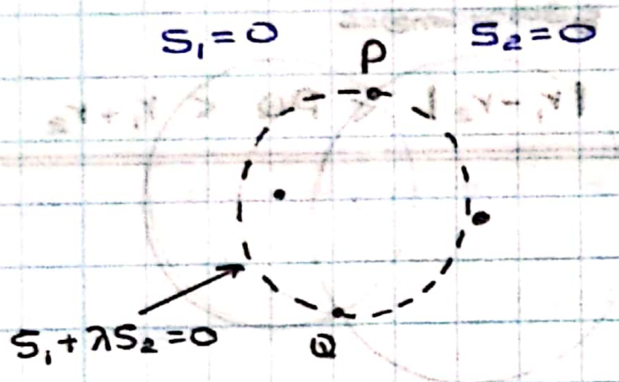
$$g_1^2-2g_1g_2+g_2^2+f_1^2+f_2^2-2f_1f_2 = g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2$$

$$-2g_1g_2-2f_1f_2 = -c_1-c_2$$

$$2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2$$

Scanned with CamScanner

වෘත්ත දෙකක ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය



ප්‍රමේයය →

$S_1 = x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$

සහ $S_2 = x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$

ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක් $S_1+\lambda S_2=0$ ලෙස ලිවිය හැක. $(\lambda \neq -1)$

සාධනය

$P\equiv(x_1,y_1)$ $Q\equiv(x_2,y_2)$ ලෙස ගනිමු.

$S_1=0$, $P\equiv(x_1,y_1)$ හරහා යන නිසා,

$x_1^2+y_1^2+2g_1x_1+2f_1y_1+c_1=0$ —— (1)

$S_2=0$, $P\equiv(x_1,y_1)$ හරහා යන නිසා,

$x_1^2+y_1^2+2s_2x_1+2f_2y_1+c_2=0$ —— (2)

$S_1+\lambda S_2=0$ සලකමු.

$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1+\lambda(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$

$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+2(g_1+\lambda g_2)x+2(f_1+\lambda f_2)y+c_1+\lambda c_2=0$

$\lambda\neq-1$ විට x^2 හා y^2 සංගුණක සමාන වේ. —— (3)

∴ මෙමගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වේ.

(1) + λ(2)

$(x_1^2+y_1^2+2g_1x_1+2f_1y_1+c_1)+\lambda(x_1^2+y_1^2+2g_2x_1+2f_2y_1+c_2)=0+\lambda(0)$
$=0$

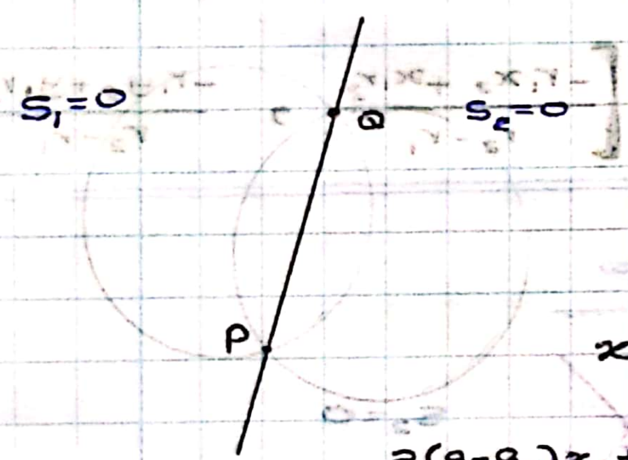
∴ $S_1+\lambda S_2=0$, $P\equiv(x_1,y_1)$ හරහා යයි. —— (4)

එලෙසම $S_1 + \lambda S_2 = 0$, $Q \equiv (x_2, y_2)$ හරහා යන බවද පෙන්විය හැකිය. ——— (5)

(3), (4), (5) ට අනුව $S_1 + \lambda S_2 = 0$ මගින් $\lambda \neq -1$ විට P හා Q හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක් නිරූපණය වේ.

පොදු ජ්‍යායේ සමීකරණය

$S_1 + \lambda S_2 = 0$ සලකමු.



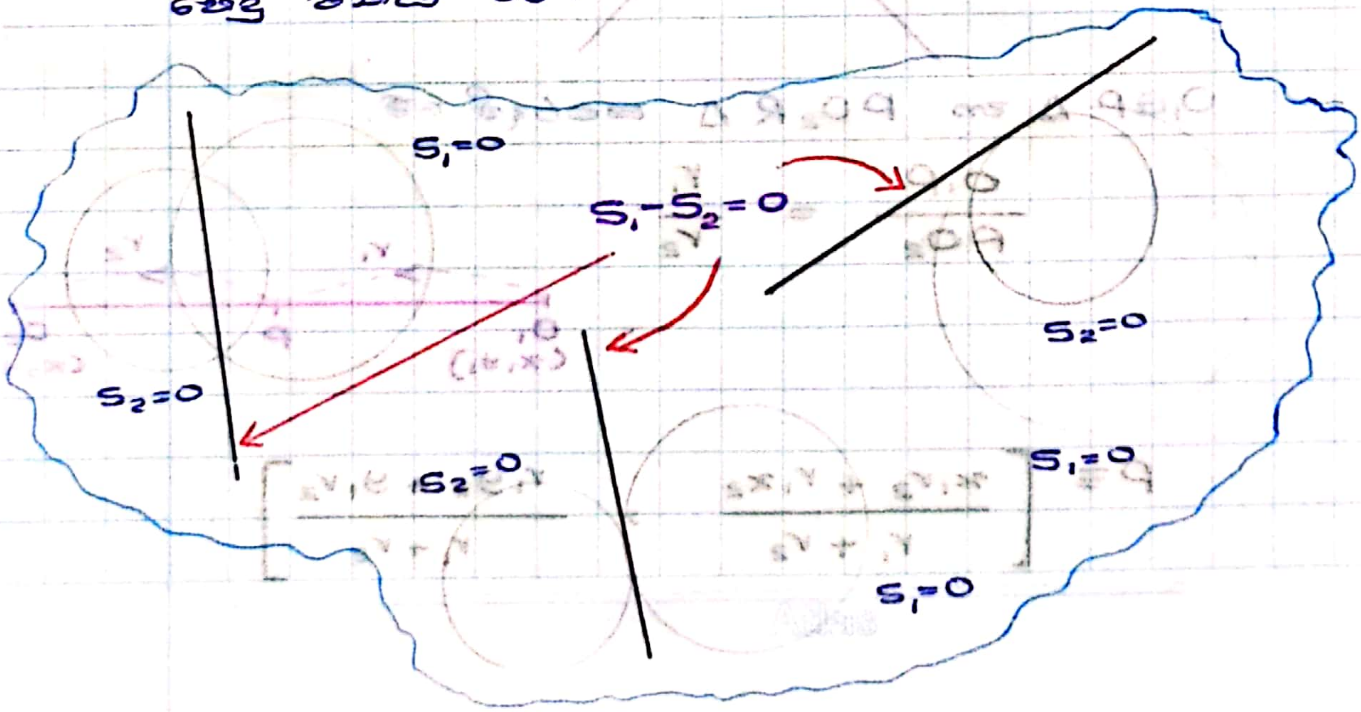
* λ හි සියලු අගයන් සඳහා මෙය P හා Q හරහා යන බව ඉහත සාධනය කරන ලදී.

$\lambda = -1$ විට,

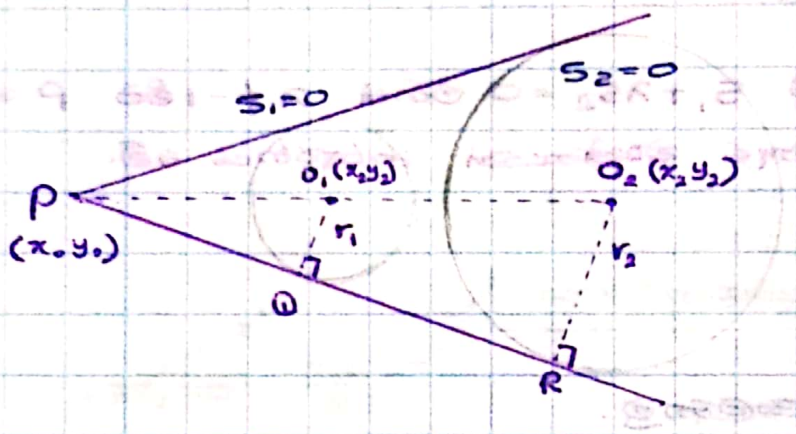
$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1-(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$$

$$2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2=0$$

මෙය x හා y හි ඒකජ සමීකරණයකි. ∴ $S_1 - S_2 = 0$ යනු P හා Q හරහා යන සරල රේඛාව එනම් පොදු ජ්‍යාය වේ.

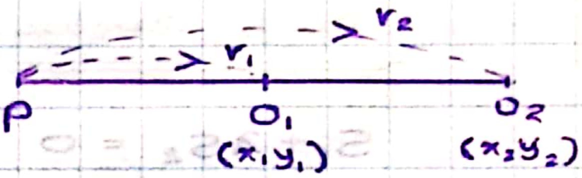


බාහිර පොදු ස්පර්ශක



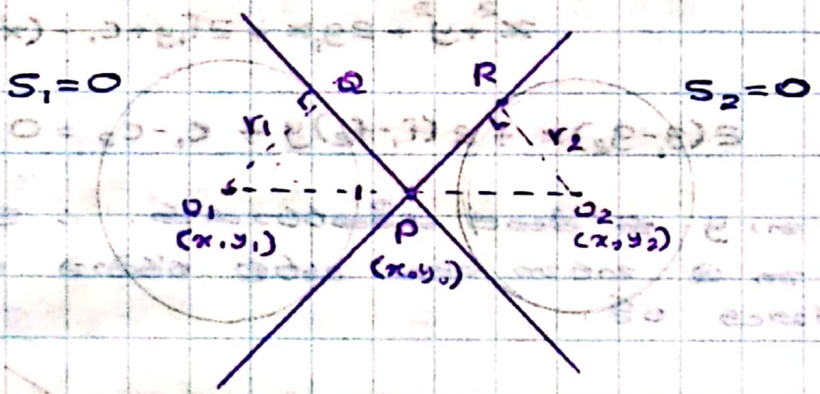
$PO_1Q\ \Delta$ හා $PO_2R\ \Delta$ සමරූපී වේ.

$$\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{r_1}{r_2}$$



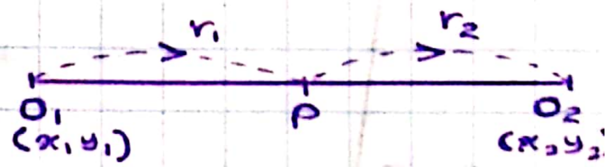
$$P\equiv\left[\frac{-r_1x_2+x_1r_2}{r_2-r_1},\ \frac{-r_1y_2+y_1r_2}{r_2-r_1}\right]$$

අභ්‍යන්තර පොදු ස්පර්ශක



$O_1QP\ \Delta$ හා $PO_2R\ \Delta$ සමරූපී වේ.

$$\frac{O_1P}{PO_2}=\frac{r_1}{r_2}$$



$$P\equiv\left[\frac{x_1r_2+r_1x_2}{r_1+r_2},\ \frac{r_1y_2+y_1r_2}{r_1+r_2}\right]$$